

### Referate.

#### Algebra und Zahlentheorie.

● **Dedekind, Richard: Gesammelte mathematische Werke. Hrsg. v. Robert Fricke, Emmy Noether u. Øystein Ore. Bd. 2. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn A.-G. 1931. 442 S. RM. 40.50.**

Der 2. Band der Dedekindschen Werke bringt zunächst weitere 15 (Nr. 20—34) der von ihm selbst ab 1885 veröffentlichten Arbeiten; darunter befinden sich nicht die im 3. Band erscheinenden Supplemente zu den Dirichletschen Vorlesungen über Zahlentheorie sowie die Schriften „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ und „Was sind und was sollen die Zahlen?“ Die einzelnen Stücke sind von Emmy Noether und Ore mit kurzen Anmerkungen versehen, die die seither erfolgte Entwicklung und verwandte Fragestellungen herausarbeiten. Zu diesen bekannten Veröffentlichungen treten 11 hier zum erstenmal mitgeteilte Stücke des Nachlasses. Dabei konnte auf die Wiedergabe der im engeren Sinne fragmentarischen Arbeiten um so eher verzichtet werden, als wir von ihnen durch den Briefwechsel mit Frobenius ein überaus deutliches Bild besitzen; diese im Besitz von E. Landau befindlichen Briefe sind am Schluß des Bandes auszugsweise wiedergegeben. Die Reihe der Nachlaßpublikationen wird eröffnet durch zwei Nummern topologischen Charakters: 35. Allgemeine Sätze über Räume, und 36. Beweis und Anwendungen eines allgemeinen Satzes über mehrfach ausgedehnte stetige Gebiete. Die erste Notiz betrifft nach unserer heutigen Sprache die Definition der offenen Menge und ihres Randes; in der zweiten handelt es sich um einen sehr allgemeinen mengentheoretischen Satz, der für beschränkte Punktmengen Euklidischer Räume die Existenz eines in einem gewissen Sinn ersten Elementes einer bestimmten Eigenschaft zu erschließen gestattet; hieraus ergibt sich beispielsweise als Spezialfall der Satz vom Minimum einer stetigen Funktion im abgeschlossenen Quader sowie, worauf E. Noether hinweist, der Heine-Borelsche Überdeckungssatz. 37. Stetiges System aller Abbildungen der natürlichen Zahlenreihe  $N$  in sich selbst. Es wird gezeigt, daß das System aller Abbildungen eine ordnungsfähige Menge darstellt. 38. Charakteristische Eigenschaft einklassiger Körper  $\Omega$ : Es handelt sich um das in neuester Zeit von H. Hasse in allgemeinerem Zusammenhang wiedergefundene Kriterium dafür, daß ein endlicher algebraischer Zahlkörper einklassig ist [vgl. H. Hasse, Über eindeutige Zerlegung in Primelemente; J. f. d. r. u. a. Math. **159** (1928)]. 39. Konstruktion von Quaternionenkörpern schließt an die Arbeit „Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind“ an; es handelt sich um den genauen Nachweis einer in ihr skizzierten Behauptung über die Quaternionenkörper über dem Zahlkörper  $R$  ( $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ) ( $R$  = Körper der Rationalzahlen). 40. Zur Theorie der Ideale (Göttingen 1894). Anwendung auf die Kreiskörper. Enthält einen Irreduzibilitätsbeweis der Kreisteilungsgleichung auf Grund der folgenden Schlüsse: 1. Eine primitive  $m$ -te Einheitswurzel bleibt primitiv modulo jedem in  $m$  nicht aufgehenden Primideal  $\mathfrak{p}$  des Körpers  $K$  dieser Einheitswurzeln. 2. Es gibt eine Substitution  $\psi_0$  der Zerlegungsgruppe von  $\mathfrak{p}$ , für die  $\omega \psi_0 \equiv \omega^p \pmod{\mathfrak{p}}$  für jedes ganze  $\omega$  aus  $K$ . 41. Gruppencharaktere von Zahlklassen in endlichen Körpern. Hier werden die heute sog. „eigentlichen“ Charaktere erklärt und zugleich der Begriff des Führers, insbesondere des Führers eines Charakters, im Sinne der Klassenkörpertheorie gewonnen; die damit zusammenhängende Zerlegung der  $\zeta$ -Funktion in eigentliche  $L$ -Reihen behandelt neben anderen Fragen ein Brief vom 8. VII. 1896 an Frobenius (vgl. 45). Die auf die Charaktere und den Führer bezüglichen Methoden werden zwar nur für Spezialfälle angewandt, sind aber so allgemein gehalten, daß sie auch im weitesten Fall der heutigen Klassenkörpertheorie gelten würden. 42. Grundideale von Kreiskörpern gibt eine Anwendung der in 41 entwickelten Überlegungen; insbesondere findet man für den vorliegenden Fall die Darstellung der Diskriminante als Produkt der Führer der Charaktere der zugehörigen Klassengruppe, wie sie kürzlich Artin auch auf beliebige Galoissche nicht lediglich Abelsche Körper ausgedehnt hat. 43. Untersuchung der Gruppe  $X$  bringt einen Satz über die Trägheits- und Verzweigungsgruppen eines Galoisschen Körpers  $K$ . 44. Ideale in Normalkörpern gibt Ansätze zu einer formalen Differentiation in algebraischen Zahlkörpern, die zur Untersuchung der Differenten gedacht waren. Den Band beschließen die Auszüge aus Briefen an Frobenius. In den ersten beiden findet man Resultate, die unabhängig Frobenius wiederentdeckte und publizierte unter dem Titel „Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Zahlkörpers und den Substitutionen seiner Gruppe“ (Berliner Akademie 1896). Es folgt ein Brief, in dem



Dedekind sich ausläßt über Ordnungen mit vorgeschriebenem Führer, über umkehrbare und nicht umkehrbare Moduln und die evtl. Anwendung der Modultheorie auf die Theorie der Reziprozitätsgesetze. Die letzten Briefe betreffen die hyperkomplexen Systeme und die Darstellungstheorie; diese Frobenius 1896 mitgeteilten Gedanken gehen zurück auf das Jahr 1886, teilweise sogar bis 1880. Es handelt sich zunächst um die Definition der Gruppendeterminante und ihre Zerlegung in Linearfaktoren, wozu mehrere Beispiele mit verschiedenartigen Ausblicken durchgeführt werden; insbesondere wird der Zusammenhang zwischen der Gruppendeterminante einer Gruppe  $\mathfrak{G}$ , dem Index der in  $\mathfrak{G}$  enthaltenen Kommutatorgruppe  $\mathfrak{A}$  unter  $\mathfrak{G}$  und den Charakteren von  $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$  berührt. Es folgen noch Mitteilungen über die Zerlegung der Gruppendeterminante Abelscher Gruppen in lineare Charakterfaktoren, über Charaktere, insbesondere die eigentlichen, und schließlich über die Konstruktion hyperkomplexer Systeme mit vorgegebener Gruppendeterminante. Die Briefe sind, wie alle Nachlaßstücke mit Ausnahme des unter 39. aufgezählten, von W. Weber bearbeiteten, von E. Noether kommentiert. Grell (Jena).

**Turkin, W. K.: Die Nichtexistenz einfacher Gruppen der ungeraden Ordnungen  $p^3q^3r$  und  $p^4q^2r$ .** Math. Annalen **104**, 770—777 (1931).

Der im Titel ausgesprochene Satz wird mit Hilfe der von Burnside und Frobenius entwickelten Methoden bewiesen. Zusammen mit schon bekannten Sätzen ergibt sich daraus, daß für eine einfache Gruppe, deren Ordnung ungerade ist und nicht mehr als 7 Primfaktoren enthält, höchstens die Typen  $p^4qrs$ ,  $p^3q^2rs$ ,  $p^3qrst$  übrigbleiben. Magnus (Göttingen).

**Kulakoff, A.: Über die Anzahl der eigentlichen Untergruppen und der Elemente von gegebener Ordnung in  $p$ -Gruppen.** Math. Annalen **104**, 778—793 (1931).

Es werden die folgenden Verschärfungen bekannter Sätze von Frobenius bewiesen: In nichtzyklischen Gruppen der Ordnung  $p^m$  ( $p$  eine ungerade Primzahl) gilt: 1. Die Anzahl der Untergruppen der Ordnung  $p^s$  ( $1 \leq s < m$ ) ist  $\equiv 1 + p \pmod{p^2}$ , und 2. die Anzahl aller Elemente, deren Ordnungen in  $p^s$  aufgehen, ist durch  $p^{s+1}$  teilbar. Magnus (Göttingen).

**Taketa, Kiyosi: Über die monomiale Darstellung einer auflösbaren Gruppe.** (Math. Inst., Imp. Univ., Tokyo.) Proc. imp. Acad. (Tokyo) **7**, 129—132 (1931).

Jede Darstellung einer auflösbaren Gruppe, deren Hauptreihe 3 Glieder enthält (Gesamtgruppe und Einheits-element mitgerechnet), läßt sich auf monomiale Gestalt transformieren. Für auflösbare, nicht Abelsche Gruppen, deren Hauptreihe die Länge 4 hat, zeigt der Verf. das Folgende: Ist  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{N}_1$ ,  $\mathfrak{N}_2$ ,  $\mathfrak{E}$  eine Hauptreihe der Gruppe  $\mathfrak{G}$  und gehört  $\mathfrak{N}_2$  nicht zum Zentrum, so läßt sich jede Darstellung von  $\mathfrak{G}$  auf monomiale Gestalt transformieren. Gehört dagegen  $\mathfrak{N}_2$  zum Zentrum, so läßt sich dann und nur dann jede Darstellung von  $\mathfrak{G}$  auf monomiale Gestalt transformieren, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist: 1.  $\mathfrak{N}_1$  ist Abelsch. 2. Bei jeder irreduziblen isomorphen Darstellung von  $\mathfrak{G}$  hat die Darstellung von  $\mathfrak{N}_1$ , wenn sie vollständig reduziert wird, lauter voneinander verschiedene Bestandteile. Tausky (Wien).

**Miller, G. A.: Automorphisms of order 2 of an abelian group.** (Dep. of Math., Univ. of Illinois, Urbana.) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. **17**, 320—325 (1931).

Zu jeder Gruppe  $\mathfrak{G}$  gibt es eine sie als Normalteiler enthaltende Gruppe  $\mathfrak{G}'$ , so daß jeder Automorphismus von  $\mathfrak{G}$  durch Transformation mit Elementen von  $\mathfrak{G}'$  erzeugt werden kann. Die Automorphismen der Ordnung 2 können daher durch Transformation mit einem solchen Operator  $t$  erzeugt werden, der nicht mit sämtlichen Gruppenelementen vertauschbar ist, während die Transformation mit  $t^2$  jedes Element in sich überführt. Der Verf. bestimmt die Anzahl derjenigen Automorphismen der Ordnung 2 von Abelschen Gruppen, die in der Gruppe der Automorphismen invariant sind, und er betrachtet die Anzahl der zu nicht invarianten Automorphismen der Ordnung 2 konjugierten Automorphismen. Während eine Gruppe der Ordnung 2 keinen invarianten Automorphismus der Ordnung 2 zuläßt, besitzt jede Abelsche Gruppe, die eine Ordnung  $> 2$  hat, mindestens einen solchen. Bei der Angabe der genauen Zahl der invarianten Automorphismen der Ordnung 2 kann man sich natürlich auf Abelsche Gruppen von Primzahlpotenzordnung beschränken. Für nicht invariante Automor-



phismen der Ordnung 2 gilt: Ist die Ordnung der Gruppe ungerade und  $p$  ein beliebiger Primfaktor, so ist die Anzahl der zu einem Automorphismus der Ordnung 2 konjugierten Automorphismen mindestens  $p^2$ . Ist die Ordnung der Gruppe dagegen von der Form  $2^m$ , so kann diese Anzahl auch 2 selbst sein. — Jeder Automorphismus, erzeugt durch die Transformation mit einem Operator  $t$ , gibt zu einer Kommutatorgruppe Anlaß, nämlich der durch die Kommutatoren  $t^{-1}s^{-1}ts$  erzeugten Gruppe, wobei  $s$  die Elemente der Gruppe durchläuft. Der Automorphismus ist dann und nur dann von der Ordnung 2, wenn jeder Kommutator  $t^{-1}s^{-1}ts$  durch die Transformation mit  $t$  in den inversen Kommutator übergeführt wird. Der Verf. behandelt den Fall, daß die durch einen Automorphismus der Ordnung 2 bei einer Abelschen Gruppe der Ordnung  $2^m$  bestimmte Kommutatorgruppe zyklisch oder vom Typus  $(1, 1, \dots, 1)$  ist und er untersucht die möglichen Ordnungen der bei Abelschen Gruppen der Ordnung  $2^m$  auftretenden Kommutatoren.

Taussky (Wien).

**Turnbull, H. W.:** On the fundamental theorems of invariant-theory for the unitary group. Proc. roy. Acad. Amsterd. 34, 413—419 (1931).

Es gibt drei Typen von ganzen rationalen Invarianten beliebig vieler Vektoren in der Geometrie der unitären Transformationen, d. h. der linearen Transformationen, welche die Hermitesche Form  $(\bar{x}/x) = \bar{x}_1 x_1 + \dots + \bar{x}_n x_n$  in Ruhe lassen: Die bilineare Invariante  $(\bar{a}/b)$  und die beiden Determinanten  $(ab \dots hk)$ ,  $(\bar{a} \bar{b} \dots \bar{h} \bar{k})$ . Jede ganze rationale Invariante von Formen beliebiger Ordnung kann daher in der Invariantentheorie der unitären Gruppe als ganze rationale Funktion symbolischer Produkte dieser drei Typen geschrieben werden. Dies Resultat bleibt unverändert, wenn an Stelle der oben angegebenen Normalform eine beliebige reguläre Hermitesche Form  $(\bar{x}/x) = \sum h_{ik} \bar{x}_i x_k$  tritt. Die unitären Invarianten eines vorgegebenen Formensystems erhält man als projektive Invarianten des um die Hermitesche Form  $(\bar{x}/x)$  vermehrten Formensystems. Dieser Zusammenhang mit der projektiven Invariantentheorie liefert auch den die Fundamentalidentitäten betreffenden zweiten Fundamentalsatz. Die Beweise sind — wie der Verf. selbst hervorhebt — den Studyschen Beweisen für die Fundamentalsätze über orthogonale Invarianten nachgebildet. E. A. Weiss.

**Gilham, C. W.:** The complete system of the binary  $(2, 1, 1)$  form. Proc. Lond. math. Soc., II. s. 32, 259—272 (1931).

The complete system of covariants of a form of orders 2, 1, 1 in three independent binary variables is obtained by a method, developed formerly by the same author. The system consists of 65 forms.

van der Waerden (Leipzig).

**Drost s. j., A. J.:** Reihenentwicklungen von algebraischen Formen. Groningen: Amsterdamer Diss. 1931. 68 S. [Holländisch].

Die Reihenentwicklungen der Invariantentheorie bezwecken, eine beliebige algebraische Form zu schreiben als Summe von Polaren von Formen, die möglichst wenig Variable enthalten und außerdem möglichst einfache Symmetrieeigenschaften besitzen (Normalformen). Solche Reihenentwicklungen sind von P. Gordan, A. Clebsch, A. Capelli, J. Deruyts, K. Petr, E. Noether, A. Young und J. A. Schouten aufgestellt worden. Die vorliegende Dissertation gibt eine übersichtliche Zusammenstellung dieser verschiedenen Reihenentwicklungen in einer einheitlichen Symbolik. Für die Capellische Reihenentwicklung wird ein neuer Beweis gegeben. Die Identität der Reihen von Deruyts und Young scheint der Verfasser nicht bemerkt zu haben.

van der Waerden (Leipzig).

**Weitzenböck, R.:** Die Komitanten des Konnexes  $\sum A_{ik,\lambda} \Pi_{ik} x_\lambda$ . Proc. roy. Acad. Amsterd. 34, 102—105 (1931).

Aufstellung eines kleinsten vollständigen Formensystems einer in Plückerschen Linienkoordinaten und einem binären Parameter linearen Form (12 Kovarianten, eine Invariante). Geometrische Deutung einiger Formen.

Weiss (Bonn).



**Weitzenböck, R.: Die Invariantentypen bei ternären eingliedrigen Gruppen.** Proc. roy. Acad. Amsterd. **34**, 508—514 (1931).

Die infinitesimalen Transformationen der ternären eingliedrigen Gruppen werden auf 3 Normalformen zurückgeführt, die nacheinander behandelt werden. Die 1. Normalform lautet:

$$AF = \frac{\partial F}{\partial x_1} \lambda_1 x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \lambda_2 x_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \lambda_3 x_3.$$

Die Punkt- und Geradenkoordinaten und ebenso alle Koeffizienten beliebiger Formen in Punkt- und Geradenkoordinaten sind (mit verschiedenen „Gewichten“) einzeln Invarianten dieser infinitesimalen Transformation. Im Falle der 2. Normalform ergeben sich 7, im 3. Falle 12 Typen von A-Invarianten beliebig vieler Punkte und Geraden. Es zeigt sich, daß man in diesem letzten Falle die A-Invarianten eines Systems ternärer Grundformen auch dann erhält, wenn man die projektiven Invarianten des um die Formen  $x_3$  und  $2x_1x_3 - x_2^2$  vermehrten Systems aufsucht. Dieser Adjunktionsatz wird benutzt, um ein kleinstes vollständiges System von A-Invarianten einer ternären quadratischen Form aufzustellen. *E. A. Weiss* (Bonn).

**Weitzenböck, R.: Das Typenproblem und der Adjunktionsatz in der Invariantentheorie linearer Gruppen.** Proc. roy. Acad. Amsterd. **34**, 361—367 (1931).

Die Arbeit behandelt zwei Aufgaben: 1. Ist  $\mathcal{G}$ , eine lineare homogene Untergruppe der allgemeinen projektiven Gruppe des Raumes  $n$ -ter Stufe, so soll ein vollständiges System ganzer rationaler  $\mathcal{G}$ -Invarianten einer Reihe  $n$ -ärer Grundformen  $\{F\} = F_1, F_2, \dots$  (d. h. von Polynomen in Punkt-, Geraden-, ...,  $R_{n-2}$ -Koordinaten) aufgestellt werden. Dies Problem wird (mit Hilfe der symbolischen Darstellung) nacheinander auf die Aufgaben zurückgeführt, die Typen von  $\mathcal{G}$ -Invarianten beliebig vieler Linearformen in Punkt- und  $R_{n-2}$ -Koordinaten oder zweitens in Punktkoordinaten allein zu finden; drittens auf die Ermittlung aller  $\mathcal{G}$ -Invariantentypen von höchstens  $n-1$  Punkten, und diese Aufgabe ist schließlich ein Problem der binären Invariantentheorie. 2. Die Gruppe  $\mathcal{G}$  sei durch eine Anzahl  $n$ -ärer Formen  $\{G\} = G_1, G_2, \dots$  definiert, welche die Transformationen der Gruppe „gestatten und bestimmen“. Dann erhält man alle  $\mathcal{G}$ -Invarianten vorgegebener Grundformen  $\{F\} = F_1, F_2, \dots$  nach dem Adjunktionsatz als projektive Invarianten des vereinigten Systems  $\{F\} + \{G\}$ . *E. A. Weiss*.

### Zahlentheorie:

**Fitting, F.: Rein mathematische Behandlung des Problems der magischen Quadrate von 16 und von 64 Feldern.** Jber. dtsch. Math.-Verigg. **40**, 177—199 (1931).

Ein magisches Quadrat bedeutet hier eine solche Einordnung der Zahlen 0, 1, ..., 15 in die Felder eines 16 zelligen Q., daß in jeder Reihe, Kolonne und in beiden Diagonalen die Summe 30 ist. Durch Addition von 1 zu jeder Zahl entstehen aus diesen die üblichen Q. Die Zahlen 0, 1, ..., 15 werden dyadisch dargestellt und dann werden zuerst die Achter, dann die Vierer, die Zweier und die Einer aller 16 Zahlen eines m. Q. in die gleichliegenden Felder von 4 noch leeren Q. gebracht. Diese 4 mit den Ziffern 0 und 1 gefüllten Q. werden die „Komponenten“ des m. Q. genannt und ein solches Q. eine „Form“. Die Herstellung aller m. Q. wird so auf die ihrer Komponenten zurückgeführt; 4 mit 8 Ziffern 0 und 8 Ziffern 1 gefüllte Q. sind die K. eines m. Q., wenn durch ihre Zusammensetzung die Summe in den 10 magischen Richtungen 30 ist und jede Zahl 0, 1, ..., 15 je einmal entsteht. Jede „Form“ hat in jeder Reihe und Kolonne 2 Ziffern 1 und es gibt: A-Formen, welche auch in den beiden Diagonalen 2 Ziffern 1 aufweisen; B-Formen, welche in einer Diagonale dreimal und in der anderen einmal 1 aufweisen; C-Formen, welche in einer Diagonale viermal 1 und in der anderen viermal 0 aufweisen. Die Anzahl aller m. Q. ist 880, welche Zahl von Frenicle de Bessy (1693) in mathematisch nicht ganz befriedigender Weise gefunden ist. Die A-Formen sind magisch in dem Sinne, als sie in den 10 magischen Richtungen dieselbe Summe haben. Der durch Weglassung der A-Formen aus einem K.-Quadrupel restierende Formenkomplex muß daher bei Zusammensetzung der Zahlen auch ein in diesem Sinne m. Q.



geben. Verf. nennt nun die A-Formen und diese restierende Formenkomplexe „Primterme“ und gibt 14 „Primterm“-Kombinationen, aus welchen die 880 m. Q. durch 4 bestimmte Operationen hergeleitet werden können. Die Methode der Komponentenzerlegung wird noch angewandt auf Beispielen von 64feldrigen Q. Das Verfahren bei einem 3. Beispiel kann auf alle  $(4m)^2$ feldrigen Q. angewendet werden und stellt eine allgemeine Lösung dar des Problems pandiagonale Q. von  $(4m)^2$  Feldern zu bilden.  
N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Driel, M. J. van:** Symmetrische Zauberquadrate. Nieuw Arch. Wiskde 17, 87—92 (1931) [Holländisch].

Zauberquadrate der Zahlen 1, 2, ...,  $5^2$ . Jede horizontale und jede vertikale Reihe und beide diagonalen Reihen bilden die Summe 65 und jede 2 Zahlen, deren Summe 26 ist, haben eine Verbindungslinie, die durch den Mittelpunkt des Quadrates halbiert wird.  
N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Toscano, Salvatore A.:** Considerazioni generali sulla teoria elementare dei numeri nel campo interno. Riv. Fis. ecc. 5, 184—191 u. 232—240 (1931).

Allgemeine Betrachtungen über die elementare Theorie der ganzen Zahlen. 2 Zahlen, die nicht beide Potenzen einer 3. sind, nennt Verf. „semplici fra loro per base di potenza“; dieser Begriff stimmt überein mit dem Begriffe der relativen Primzahlen im Gebiete der Multiplikation.  
N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Aronszajn, N.:** Une remarque sur les singularités des séries de Dirichlet. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1346—1348 (1931).

D'après M. V. Bernstein (Thèse. Rendic. del R. Instit. Lombardo 2<sup>e</sup> série, VI—X, p. 4) on appelle abscisse d'holomorphie de la fonction

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad (\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n; \lambda_n \rightarrow \infty) \quad (1)$$

la borne inférieure  $h$  de tous les  $x$  tels que  $f(s)$  est prolongeable dans tout le demi-plan  $\sigma > x$  ( $s = \sigma + it$ ). M. V. Bernstein a démontré que si la suite  $\{\lambda_n\}$  est de densité maximum finie,  $f(s)$  possède au moins un point singulier sur la droite  $\sigma = h$ . M. Aronszajn démontre que le théorème de M. Bernstein n'est pas valable, en général, pour les séries de Dirichlet telles que

$$\lim (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0. \quad (\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n; \lambda_n \rightarrow \infty) \quad (2)$$

Chaque fois qu'on donne une suite  $\{\lambda_n\}$  vérifiant (2) on peut choisir les  $a_n$  de sorte que la fonction correspondante (1) n'ait aucun point singulier sur  $\sigma = h$ . L'auteur mentionne une remarque de M. V. Bernstein d'après laquelle le résultat qu'on vient de citer peut-être généralisé en remplaçant (2) par une condition moins restrictive. L'auteur donne les grandes lignes de la démonstration.  
Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

**Obrechhoff, Nikola:** Sur la sommation des séries de Dirichlet. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1436—1439 (1931).

Soit  $\varphi(x)$  une fonction continue positive et non décroissante pour  $x > 0$  et telle que si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \delta)}{\varphi(x)} = 1,$$

quel que soit  $\delta$ . Soit d'autre part une suite  $\{\lambda_n\}$ :  $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ . L'auteur dit que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$  est sommable  $(\varphi, \lambda)$  avec la somme  $s$ , si, en posant

$$A\varphi(x) = \sum_{\lambda_n < x} C_n \varphi(x - \lambda_n),$$

on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1.$$

On a la sommation de Riesz respectivement de première et de seconde espèce quand  $\varphi(x) = x^K$  et  $\varphi(x) = (1 - e^{-x})^K$ ,  $K > 0$ . L'auteur démontre pour sa sommation générale

quelques théorèmes connus pour la sommation de Riesz: ainsi, par exemple, il démontre un théorème concernant la sommabilité d'un produit de Dirichlet de deux séries. Il démontre aussi l'existence d'une abscisse de sommabilité  $(\varphi, \lambda)$  pour une série de Dirichlet. Les démonstrations sont esquissées. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Walfisz, Arnold:** Über einige trigonometrische Summen. *Math. Z.* **33**, 564—601 (1931).

In seiner Arbeit hat der Verf. für die trigonometrischen Summen, die mit der Teileranzahl  $d(n)$  und mit der Anzahl der Zerlegungen der Zahl  $n$  in  $k$  Quadrate zusammenhängen, eine ganze Reihe neuer Abschätzungen bekommen. Es sei  $d(n)$  Teileranzahl von  $n$ ,  $r_k(n) = \sum_{n_1^2 + \dots + n_k^2 = n} 1$  die Anzahl der Zerlegungen von  $n$  in  $k \geq 2$  Quadrate

und  $R_k(x) = R_k(x, \Theta) = \sum_{0 \leq n \leq x} r_k(n) e^{2n\pi i \Theta}$ . Da eine solche Abschätzung von der arithmetischen Natur der Zahl  $\Theta$  abhängt, unterscheidet deshalb der Verf. 6 Fälle: I.  $\Theta$  ist irrational und besitzt beschränkte Kettenbruchnenner. Dann sind

$$R_3(x) = O(x^{\frac{3}{4}} \ln x); \quad R_k(x) = O(x^{\frac{k}{2}-1}) \quad k \geq 5.$$

II.  $\Theta$  durchläuft eine geeignete Menge fast aller Zahlen. Dann sind

$$R_3(x) = O(x^{\frac{3}{4}} \ln^{2+\varepsilon} x); \quad R_4(x) = O(x \ln^{3+\varepsilon} x); \quad R_k(x) = O(x^{\frac{k}{2}-1}) \quad k \geq 5;$$

$$R_k(x) = O(x^{\frac{k}{4}} \ln^{\frac{k}{4}} x); \quad \sum_{n \leq x} d(n) e^{2n\pi i \Theta} = O(x^{\frac{1}{2}} \ln^{2+\varepsilon} x);$$

$$\sum_{n \leq x} d(n) e^{2n\pi i \Theta} = O(x \ln^{\frac{1}{2}} x \ln \ln x); \quad R_2(x) = O(x^{\frac{1}{2}} \ln^{2+\varepsilon} x).$$

III.  $\Theta$  ist eine beliebige irrationale Zahl. Dann sind

$$R_k(x) = O(x^{\frac{k}{4}}); \quad \sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n} \sin 2n\pi \Theta = o(\ln x).$$

IV.  $\Theta$  ist eine beliebige irrationale algebraische Zahl. Dann konvergiert die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n} e^{2\pi i n \Theta}.$$

V.  $\Theta$  gehört einer geeigneten Menge irrationaler Zahlen an. Dann sind für  $\varphi(x) \geq 1/x$

$$\sum_{n \leq x} d(n) \sin 2\pi n \Theta = O_L^R[\varphi(x) x \ln x]; \quad \sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n} \sin 2\pi n \Theta = O_L^R[\varphi(x) \ln x].$$

VI.  $\Theta$  ist beliebig. Dann sind

$$R_4(x) = O(x \ln \ln x); \quad \sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n} \sin 2\pi n \Theta = O(\ln x).$$

A. Gelfond (Moskau).

**Corput, J. G. van der:** Über Systeme von linear-homogenen Gleichungen und Ungleichungen. *Proc. roy. Acad. Amsterd.* **34**, 368—371 (1931).

Es sei  $x = (x', x'', \dots, x^{(m)})$  ein Punkt in  $R_m$  [ $m (\geq 1)$  vorgegeben].  $S$  ist ein System von  $l$  Gleichungen und  $r$  Ungleichungen

$$S: f_\lambda(x) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l); \quad g_\varrho(x) \geq 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r);$$

hierin ist  $l \geq 0, r > 0$  und sind  $f_\lambda(x)$  und  $g_\varrho(x)$  Linearformen in  $x', x'', \dots, x^{(m)}$ . Mit  $R(S)$  wird der kleinste lineare Raum bezeichnet, der alle Lösungen von  $S$  enthält.

Satz 1. Sind  $\varrho_\tau \leq r$  ( $\tau = 1, 2, \dots, t$ ) alle natürliche Zahlen  $\leq r$ , denen man einen Punkt  $(v_1, v_2, \dots, v_r)$  mit Koordinaten  $\geq 0$  und  $v_{\varrho_\tau} > 0$  und einen Punkt  $(u_1, u_2, \dots, u_l)$  mit

$$\sum_{\lambda=1}^l u_\lambda f_\lambda(x) + \sum_{\varrho=1}^r v_\varrho g_\varrho(x) = 0$$



zuordnen kann, so ist  $R(S)$  der Raum definiert durch

$$f_{\lambda}(x) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l), \quad g_{\varrho_{\tau}}(x) = 0 \quad (\tau = 1, 2, \dots, t).$$

Bei dem Beweise wird der Farkassche „Grundsatz der einfachen Relationen“ benutzt. (J. f. Math. **124**, 1—27, 1902.) Weiter: Satz 2. Sind die in  $S$  vorkommenden Linearformen  $f_{\lambda}$  und  $g_{\varrho}$  ganzzahlig, so ist  $R(S)$  der kleinste lineare Raum, der alle ganzzahligen Lösungen von  $S$  enthält. Satz 3 besagt: Sind  $f_{\lambda}$  und  $g_{\varrho}$  ganzzahlig, dann darf man in Satz 1 beidemal das Wort „Punkt“ durch „Gitterpunkt“ ersetzen. (Wichtig ist der Spezialfall der Sätze 1 und 3 für  $t = 0$ .)

NB.: Man beachte, daß man den zweiten (entstellten) Absatz von S. 369 wie folgt lesen muß: „Ich behaupte, daß  $R(S)$  der durch (2) definierte Raum ist. Daß jeder Punkt  $x$  von  $R(S)$  dem System (2) angehört, ist klar, aber ich behaupte, daß auch umgekehrt, jeder Punkt  $x$  mit (2), dem Raum  $R(S)$  angehört.“

J. F. Koksma (Göttingen).

**Corput, J. G. van der:** Über diophantische Systeme von linear-homogenen Gleichungen und Ungleichungen. Proc. roy. Acad. Amsterd. **34**, 372—382 (1931).

Es sei  $x = (x', x'', \dots, x^{(m)})$  ein Punkt in  $R_m$  [ $m (\geq 1)$  vorgegeben].  $S$  ist ein System von  $l$  Gleichungen und  $r$  Ungleichungen

$$S: f_{\lambda}(x) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l), \quad g_{\varrho}(x) \geq 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r),$$

wo  $l$  und  $r \geq 0$ , doch nicht beide  $= 0$  sind, und wo  $f_{\lambda}(x)$  Linearformen,  $g_{\varrho}(x)$  ganzzahlige Linearformen in  $x', x'', \dots, x^{(m)}$  bezeichnen.  $s$  ganzzahlige Lösungen  $x, x_2, \dots, x_s$  heißen eine (ganzzahlige) Basis von  $S$ , wenn jede ganzzahlige Lösung  $x$  von  $S$  auf die Gestalt  $x = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_s x_s$  mit ganzen  $p_{\sigma} \geq 0$  gebracht werden kann. Existiert keine Basis von  $S$  mit weniger Elementen  $x_{\sigma}$ , so heißt unsere Basis Minimalbasis von  $S$ . Satz 1. Es sei  $r = 0$ , der Koordinatenursprung sei nicht die einzige ganzzahlige Lösung von  $S$ , so daß die ganzzahligen Lösungen  $x$  von  $S$  einen Modul  $N$  mit der Dimensionszahl  $n \geq 1$  bilden. Dann gilt 1.  $S$  besitzt eine aus  $n + 1$  Zahlen bestehende Minimalbasis. 2.  $N$  enthält  $n$  Gitterpunkte  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , derart, daß jeder Punkt  $x$  von  $N$  geschrieben werden kann  $x = q_1 a_1 + q_2 a_2 + \dots + q_n a_n$  mit ganzzahligen  $q_v$ , wo  $q_v$  durch  $x$  eindeutig bestimmt sind. Die  $n + 1$  Punkte

$$x_v = q_{v,1} a_1 + q_{v,2} a_2 + \dots + q_{v,n} a_n \quad (v = 1, 2, \dots, n + 1)$$

bilden dann und nur dann eine Minimalbasis von  $S$ , wenn die  $n + 1$  Determinanten

$$D_v = \begin{vmatrix} q_{v+1,1} & \dots & q_{v+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n+1,1} & \dots & q_{n+1,n} \\ q_{1,1} & \dots & q_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{v-1,1} & \dots & q_{v-1,n} \end{vmatrix} \quad (v = 1, 2, \dots, n + 1)$$

einen größten gemeinsamen Teiler  $= 1$  besitzen und entweder alle  $> 0$  oder alle  $< 0$  sind. Der Beweis dieses Satzes und der folgenden Sätze erfordert nur elementare Mittel. Satz 2. Es sei  $r \geq 1$ , es sei  $K(S)$  die Menge der Gitterpunkte  $u = (u_1, u_2, \dots, u_r) \neq (0, 0, \dots, 0)$  mit  $u_{\varrho} \geq 0$ , denen man einen Gitterpunkt  $x$  zuordnen kann mit

$$f_{\lambda}(x) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l); \quad g_{\varrho}(x) = u_{\varrho} \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r),$$

derart, daß für jeden Gitterpunkt  $\xi$  mit

$$f_{\lambda}(\xi) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l); \quad 0 \leq g_{\varrho}(\xi) \leq u_{\varrho} \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r),$$

entweder

$$g_{\varrho}(\xi) = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r) \quad \text{oder} \quad g_{\varrho}(\xi) = u_{\varrho} \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r)$$

ist. Behauptung. Die Menge  $K(S)$  ist endlich. In den 6 Behauptungen eines



Satzes 3 werden dann die Beziehungen zwischen  $K(S)$ , den Basen und Minimalbasen von  $S$  und den Basen und Minimalbasen des Systems

$$S_0 = f_\lambda(x) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l); \quad g_\varrho(x) = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r)$$

klargelegt. Die Abhandlung schließt mit dem aus Satz 1 und 3 folgenden Satz 4.  $S$  besitzt dann und nur dann eine eindeutig bestimmte Minimalbasis, wenn der Koordinatenursprung der einzige Gitterpunkt ist, der dem System  $S_0$  genügt. Ist das der Fall, so ist die Minimalbasis von  $S$  Teilmenge jeder Basis von  $S$ . J. F. Koksma (Göttingen).

## Analysis.

### Reihen :

● Knopp, Konrad: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 3. verm. u. verb. Aufl. (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Hrsg. v. R. Courant. Gemeinsam mit W. Blasehke, M. Born u. C. Runge. Bd. 2.) Berlin: Julius Springer 1931. XII, 582 S. u. 14 Abb. RM. 38.—

Die dritte Auflage unterscheidet sich in den Kapiteln I—XIII nicht wesentlich von der zweiten; im einzelnen wurde auf Grund von Unterrichtserfahrungen und Fortschritten der Wissenschaft geändert und verbessert. Dagegen wurde das Kapitel XIV über die Eulersche Summenformel und asymptotische Entwicklungen, das bereits in der englischen Ausgabe (Blackie & Son, London and Glasgow, 1928) enthalten ist, neu hinzugefügt; entsprechend der Anlage des Buches konnten natürlich nur die Grundzüge der Lehre von den asymptotischen Reihen dargestellt werden. — Nachdem die Eulersche Summenformel abgeleitet ist, folgen Anwendungen auf die Bernoullischen Polynome, die verbesserte Darstellung der Eulerschen Konstante mit Hilfe der Bernoullischen Zahlen und Restglied, die spezielle und verallgemeinerte Stirlingsche Formel, sodann der Begriff der asymptotischen Reihe und das Rechnen mit solchen Reihen, ferner Beispiele, die insbesondere auf die Theorie des Stieltjesschen Momentenproblems hinlenken. Hinweise auf weitere Problemstellungen sind zahlreich, der Literaturnachweis ist besonders reichhaltig. R. Schmidt (Kiel).

Chiellini, Armando: Sulla serie  $\sum_1^{\infty} \frac{n^r}{n!}$ . Boll. Un. mat. ital. 10, 134—138 (1931).

Sansone, G.: Un criterio sufficiente di convergenza in media per le serie di polinomi di Legendre. Boll. Un. mat. ital. 10, 121—123 (1931).

Wall, H. S.: On the Padé approximants associated with a positive definite power series. Trans. amer. math. Soc. 33, 511—532 (1931).

Nach Padé gehört zu einer Potenzreihe  $\sum_0^{\infty} (-1)^{\nu} c_{\nu} z^{\nu}$  eine doppeltunendliche Folge rationaler Näherungsbrüche

$$\frac{N_{m,n}(z)}{D_{m,n}(z)} = [m, n].$$

Die Potenzreihe heißt positiv definit, wenn die quadratischen Formen  $\sum_{\nu, \mu=0}^n c_{\nu+\mu} x_{\nu} x_{\mu}$  positiv definit sind. Für diesen Fall untersucht Wall im Anschluß an bekannte Resultate von Hamburger die Konvergenz und Divergenz der Diagonalfolgen:  $(S_k) = [\nu, k + \nu]$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  und  $(S_{-k}) = [k + \nu, \nu]$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$

Otto Szász (Frankfurt a. M.).

Corput, J. G. van der: Über einige Identitäten. Nieuw Arch. Wiskde 17, 17—27 (1931) [Holländisch].

Wie kann man eine große Anzahl Potenzreihen darstellen mit der Eigenschaft, daß die Koeffizienten jeder neuen Potenzreihe, welche aus der alten durch Potenzierung



mit beliebigen Exponenten hervorgeht, explizite bekannt sind? Ist  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(1) w^n$  eine (eventuell formelle) Potenzreihe mit  $A_0(1) = 1$ , so ist für  $x \neq 0$

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} A_n(1) w^n \right\}^x = x \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) w^n, \quad (1)$$

wo die Funktionen  $A_n(x)$  die Eigenschaft  $E$  haben; d. h.:  $A_0(x) = 1/x$ ;  $A_n(x)$  ( $n \geq 1$ ) ist ein Polynom in  $x$ ; für jedes Paar  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  gilt

$$xy \sum_{m=0}^n A_m(x) A_{n-m}(y) = (x+y) A_n(x+y) \quad (n \geq 0).$$

Umgekehrt: haben die  $A_n(x)$  ( $n \geq 0$ ) die Eigenschaft  $E$ , so gilt (1), für jedes  $x \neq 0$ . Verf. beweist: Besitzen  $A_n(x)$  und  $B_n(x)$  ( $n \geq 0$ ) die Eigenschaft  $E$ , ist

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|B_h(1)|} \rightarrow 0, \text{ so besitzen bei beliebigen festen } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ die Funktionen}$$

$$C_0(x) = 1/x, \quad C_n(x) = \alpha A_n(\alpha x + \beta n) + \alpha \delta n \sum_{h=1}^{\infty} A_n(\alpha x + \beta n + \gamma h) B_h(\delta n) \quad (n \geq 1)$$

auch die Eigenschaft  $E$ . Beim Beweise wird die Lagrange-Bürmannsche Formel benutzt. Als Anwendung leitet Verf. mit Hilfe des genannten Satzes u. a. einige Identitäten zwischen Binominalkoeffizienten her, findet u. a. eine Formel von E. Bessel-Hagen und Hasse zurück (Jber. d. Math. Ver. 37). *J. F. Koksma* (Göttingen).

**Winn, C. E.:** Sur des limites dépendant des moyennes de Hölder et Cesàro. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1433–1436 (1931).

Bekanntlich gilt der Satz: Sei  $Rc > -1$ , und

$$t_n = s_n + c \frac{s_0 + \dots + s_n}{n+1} \rightarrow (1+c)s, \quad n \rightarrow \infty;$$

dann ist  $s_n \rightarrow s$ . Den verschiedenen Beweisen [vgl. z. B. Vijayaraghavan, J. Lond. Math. Soc. 3, 130–134 (1928)] wird hier ein weiterer hinzugefügt, der an den von Knopp für reelle  $c$  gegebenen Beweis erinnert. Durch Umformung und Iteration gewinnt Winn eine Verallgemeinerung. Vgl. hierzu: Schur, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 29, 11. *Otto Szász* (Frankfurt a. M.).

**Bosanquet, L. S., and E. H. Linfoot:** On the zero order summability of Fourier series. J. Lond. math. Soc. 6, 117–126 (1931).

Die Reihe  $\sum u_n$  soll summierbar  $(\alpha, \beta)$  mit der Summe  $s$  heißen, wenn

$$S_{\omega}^{\alpha, \beta} = (\log C)^{\beta} \sum_{n < \omega} \left[ 1 - \frac{n}{\omega} \right]^{\alpha} \log^{-\beta} \frac{C}{1 - n/\omega} u_n \rightarrow s$$

bei  $\omega \rightarrow \infty$ , wo  $C > e$ , und entweder  $\alpha > 0$  oder  $\alpha = 0$ ,  $\beta > 0$ . Auch Summierbarkeit  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und ähnliche Verallgemeinerungen werden betrachtet. Zweck dieser Note ist zu zeigen, daß die Fourierreihe einer beliebigen integrierbaren Funktion  $f(x)$  fast überall summierbar  $(0, 1 + \delta)$  für  $\delta > 0$  ist. Es sei

$$g_{\sigma}(u) = (\log C)^{\sigma} \int_0^1 \log^{-\sigma} \frac{C}{1-t} \cos t u dt,$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} [f(x+u) + f(x-u) - 2s],$$

$$u_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

dann ist

$$S_{\omega}^{0, \sigma} - s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g_{\sigma}(u) \varphi\left(\frac{u}{\omega}\right) du.$$

Die Diskussion dieses singulären Integrales folgt dem Vorbild von Hardy [Proc. London Math. Soc. (2) 12, 365–372 (1913)]. Die Verf. benutzen die Konstruktion von Fejér, um zu zeigen, daß dieser Satz nicht für  $\delta = 0$  gilt. In der Tat geben sie eine stetige Funktion an, deren Fourierreihe für  $x = 0$  durch keines der Mittel  $(0, 1)$ ,



$(0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), \dots$  summierbar ist. Der Beweis ist nur für  $(0, 1)$  ausgeführt. Die Existenz einer solchen Funktion für das Mittel  $(0, 1)$  folgt allerdings unmittelbar aus einem bekannten Satz von Lebesgue, falls  $\int_0^\infty |g_1(u)| du$  divergiert. Diese Divergenz entnimmt man aber leicht aus einer kleinen Verschärfung der Abschätzungen der Verff. Hille (Princeton, N.J.).

### Differentialgleichungen :

**Takahashi, Shin-ichi:** On the zero points of an integral of a linear differential equation. Jap. J. Math. 7, 335—346 (1931).

Takahashi zeigt, daß die Nullstellen der 1. Ableitungen eines Lösungs paares des Systemes

$$\begin{aligned} y' + p_1(x)y + q_1(x)z &= 0, \\ z' + p_2(x)y + q_2(x)z &= 0 \end{aligned}$$

einander in dem Intervall trennen, in welchem

$$p_1, p_2, p_1q_2 - p_2q_1, p_1q_2 - p_2q_1 + \frac{q_1'p_1 - p_1'q_1}{q_1}, p_1q_2 - p_2q_1 + \frac{q_2'p_2 - p_2'q_2}{p_2}$$

nicht verschwinden. Aus diesem Satze lassen sich unmittelbar Anwendungen auf ein System mit konstanten Koeffizienten und auf die lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung folgern. Im Anschluß an den Beweis eines Satzes von Widder wird ein Satz über Nullstellen  $(n-1)$ -ter Ordnung der Lösungen von linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung angegeben und ein Satz über Nullstellen  $n$ -ter Ordnung der Lösungen einer besonderen inhomogenen l. gew. Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung bewiesen. Es folgt ein Satz über die Lage der Nullstellen der Lösungen einer l. h. gew. Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung, wenn über die Lage der Nullstellen der Lösungen einer zweiten derartigen Differentialgleichung gewisse Aussagen gemacht werden können. Schließlich wird bewiesen, daß eine selbstadjungierte Differentialgleichung unter bestimmten Voraussetzungen zwei linear unabhängige Integrale besitzt, deren Nullstellen einander trennen.

F. Knoll (Wien).

**Drach, Jules:** Sur les valeurs moyennes partielles et leur application aux problèmes de physique mathématique. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1327—1331 (1931).

Es wird an Beispielen gezeigt, daß sich einige bekannte Ergebnisse der Theorie der Differentialgleichungen der Physik einfach herleiten lassen, indem man von gewissen Mittelwertbildungen ausgeht. Ist  $\varrho$  eine vorgegebene Funktion, und bezeichnet  $\varrho_m$  ihren Mittelwert auf einer Kugelfläche mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $(x, y, z)$ , so besteht die Gleichung

$$\frac{\partial^2 r \varrho_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r \varrho_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r \varrho_m}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 r \varrho_m}{\partial r^2}.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Poissonsche Gleichung für ein Newtonsches Potential mit der Belegungsfunktion  $\varrho$ , da man ja dieses in der Form  $4\pi \int_0^R r \varrho_m dr$  schreiben kann, wenn  $R$  so groß gewählt wurde, daß die Kugel mit dem Radius  $R$  und dem Mittelpunkt  $(x, y, z)$  den Raumteil, in dem  $\varrho \neq 0$  ist, ganz im Inneren enthält. Auch die bekannte Integrationsmethode der Wellengleichung von Kirchhoff benutzt diesen Mittelwert, und ähnlich kann man auch andere hyperbolische Gleichungen behandeln.

Willy Feller (Kiel).

**Bremekamp, H.:** Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique. Proc. roy. Acad. Amsterd. 34, 390—398 (1931).

L' auteur a pour objet de généraliser certaines propositions donnant des cas où l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial x} + 2b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = \begin{cases} 0 & (1) \\ f & (2) \end{cases}$$



ne peut avoir, dans une région donnée, plus d'une solution prenant sur la frontière  $C$  des valeurs données d'avance. En 1<sup>er</sup> lieu, il suppose que  $a, b, c$  sont continus en tout point de la région sauf en un point  $P$  où l'une au moins de ces fonctions devient infinie, et en outre: 1° que  $u$  s'annule sur  $C$  et satisfait dans la région à l'équation (1); 2° que les dérivées secondes de  $u$  sont continues en tout point intérieur autre que  $P$ ; 3° que les dérivées premières de  $u$  sont bornées; 4° que  $u/\bar{a}$  et  $u/\bar{b}$  sont bornés; 5° que  $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - c \geq 0$ ; il prouve, en généralisant un raisonnement de M. Picard (Traité d'Analyse, t. II, p. 23) que  $u$  est alors nul. En remplaçant la dernière hypothèse par celle que  $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - c$  est borné inférieurement, il indique que la conclusion subsiste pourvu que  $C$  soit dans un certain domaine contenant  $P$ . En 2<sup>d</sup> lieu l'auteur suppose qu'une au moins des fonctions  $a, b, c$  devient infinie sur une courbe rectifiable  $C_1$  et remplace la 4<sup>e</sup> hypothèse ci-dessus par celle que  $ua^\mu$  et  $ub^\mu$  sont bornés ( $\mu > \frac{1}{2}$ ); la conclusion subsiste. En 3<sup>e</sup> lieu, l'auteur fait dans (1) le changement d'inconnue  $v = uab$ , puis cherche à remplacer dans le résultat  $a$  et  $b$  par des fonctions  $a'$  et  $b'$  de façon que la nouvelle équation soit identique à (1); cela lui fournit de nouveaux cas où la conclusion subsiste. L'auteur généralise ensuite le raisonnement de Paraf: il montre que si, dans le 1<sup>er</sup> groupe d'hypothèses, on remplace la 5<sup>e</sup> par  $c < 0$ , et si l'on celle ajoute que  $u$  est nul aux points singuliers,  $u$  est identiquement nul. Enfin l'auteur étend ses conclusions à un domaine extérieur à une courbe fermée, au cas où l'équation transformée de (1) par une inversion remplirait les hypothèses antérieures; l'inversion conserve les signes de  $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - c$  et de  $c$ . Georges Giraud (Clermont-Ferrand).

**Giraud, Georges: Détermination des tenseurs par des équations aux dérivées partielles jointes à des conditions à la frontière.** C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1338—1340 (1931).

Die vorliegende Note befaßt sich mit einem ganz ähnlichen Problem, wie es schon dies. Zbl. **1**, 62 referiert wurde. E. Schrüntner (Wien).

**Rosenblatt, Alfred: Sur l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles du premier ordre.** C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1431—1433 (1931).

Ergänzung einer 1930 in der C. r. Acad. Sci. Paris erschienenen gleichnamigen Note des Verf. Hans Lewy (Göttingen).

**Maggi, Gian Antonio: Dimostrazione di una proprietà attinente alla teoria della funzione potenziale di superficie.** Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **13**, 324—327 (1931).

Vereinfachter Beweis der Unstetigkeitsformel für die Ableitungen des Potentials der einfachen Schicht, indem die ersten Ableitungen der Dichte der Schicht stetig angenommen werden. G. Cimmino (Göttingen).

**Dive, Pierre: Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes.** C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1443—1446 (1931).

Der klassische Ausdruck für das Newtonsche Potential in dem Innern eines homogenen Ellipsoïds ist die Summe einer Konstante und einer negativ definiten Quadratsumme der 3 Koordinaten, und die Summe ist in dem Innengebiet positiv. Der Verf. stellt sich die Frage, ob umgekehrt jeder solche Ausdruck als Newtonsches Potential eines in dem Positivitätsbereich des Ausdrucks liegenden, passend gewählten homogenen Ellipsoïds dargestellt werden kann. Die Frage wird nach der üblichen elementaren Diskussion der endlichen Bedingungsgleichungen, die für die Achsen durch die Dirichletsche Integraldarstellung der Koeffizienten geliefert werden, bejahend beantwortet, und auch die Eindeutigkeit der Lösung dieser inversen Aufgabe wird angedeutet. Wintner (Baltimore).

**Jung, K.: Ein Beispiel zur Entwicklung des Raumpotentials nach Kugelfunktionen.** (Geodät. Inst., Potsdam.) Gerlands Beitr. Geophys. **29**, 346—351 (1931).

Die Masse eines homogenen abgeplatteten Rotationsellipsoïds ist  $M$ , die Halbachsen sind  $a$  und  $b$ ;  $\kappa$  ist die Gravitationskonstante,  $c^2 = a^2 - b^2$ ,  $\varrho$  und  $\vartheta$  sind Polar-



koordinaten des Aufpunkts. Hat man weiter  $b \geq c$ ,  $b \leq a \leq b\sqrt{2}$ , so findet man für das Potential in jedem Punkt des Außenraumes:

$$V = \frac{3\pi M}{\varrho} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} \cdot P_{2n}(\cos \vartheta) \cdot \left(\frac{c}{\varrho}\right)^{2n}, \quad (1)$$

wo  $P_n$  das Legendresche Polynom  $n$ -ter Ordnung ist. Das Potential im ganzen Innenraum hat die Form:

$$v = C_1 + C_2(\vartheta) \cdot \varrho^2. \quad (2)$$

Die Reihe (1) konvergiert für  $\varrho > c$ , also auch in einem Teil des Innenraumes. Ihre Summe ist da aber von  $v$  verschieden. Der Verf. hat also an einem einfachen Beispiel gezeigt, daß man die Kugelfunktionsentwicklung des Außenraumpotentials nicht im Innern der Massen anwenden darf, selbst nicht, wenn die Reihe in einem Teil des Massenraumes konvergiert.

O. Bottema (Groningen).

**Nasarow, N.:** Über die Entwicklung einer beliebigen Funktion nach Laguerreschen Polynomen. Math. Z. **33**, 481–487 (1931).

Pour qu'il soit possible de développer une fonction  $f(x)$ , définie dans l'intervalle  $(0, \infty)$ , en la série des polynomes de Laguerre

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n L_n(x), \quad A_n = \int_0^{\infty} f(x) L_n(x) p(x) dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

il suffit de supposer que la fonction  $f(x)$  possède dans l'intervalle considéré une dérivée intégrable et que les intégrales  $A_n$  ainsi que les suivantes

$$\int_0^{\infty} f'^2(x) p(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} x f'^2(x) p(x) dx$$

existent. La convergence uniforme est démontrée dans tout l'intervalle  $(c, d)$  tel que  $0 < c < d < \infty$ . On entend sous les polynomes de Laguerre ceux qui sont déterminés par les conditions

$$\int_0^{\infty} L_i(x) L_k(x) p(x) dx = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ 1 & (i = k) \end{cases},$$

$p(x)$  étant le poids généralisé  $p(x) = x^\alpha e^{-x}$  ( $\alpha > -1$ ). La méthode employée, esquissée par W. A. Steklow (Bull. Acad. Sc. **1914** et **1916**), consiste en ce que l'on écrit le reste de la série en question sous la forme d'une intégrale indéfinie afin que l'on puisse ensuite en trouver une limitation d'autant plus facilement.

W. Gontscharow.

**Bailey, W. N.:** Some series and integrals involving associated Legendre functions. Proc. Cambridge philos. Soc. **27**, 184–189 (1931).

Verf. beweist für  $R(m) > 0$  und alle Werte von  $n$  die Formel

$$\int_0^z P_n\{\cos(z-t)\} \frac{P_n^{-m}(\cos t)}{\sin t} dt = \frac{1}{m} P_n^{-m}(\cos z),$$

die der Bottemaschen Integralformel in der Theorie der Besselschen Funktionen entspricht. Ferner wertet er einige Integrale aus, in denen Legendre-Fouriersche Funktionen vorkommen, und gibt verschiedene Reihenentwicklungen nach assoziierten Kugelfunktionen an.

H. Jordan (Rom).

**Veen, S. C. van:** Asymptotische Entwicklung und Nullstellenabschätzung der Hermiteschen Funktionen. Proc. roy. Acad. Amsterd. **34**, 257–267 (1931).

Die Funktionen

$$H_n(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{2xz-z^2} z^{-n-1} dz; \quad |\arg z| \leq \pi,$$

die bei beliebigem nicht negativ ganzzahligem  $n$  der Hermiteschen Differentialgleichung  $H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$  genügen, werden für positive Werte von  $x$  und  $n$  untersucht. Zunächst werden ohne Beweis asymptotische Formeln für  $H_n(x)$  bei großem  $n$ ,



gültig für alle  $x$  mit  $0 < x < \sqrt{2(n+1)}$ , angegeben, deren Bedeutung darin liegt, daß die Entwicklung infolge des einfachen Bildungsgesetzes der Koeffizienten beliebig weit fortgesetzt werden kann. Auf Grund dieser Formeln ergibt sich sodann in der vorliegenden Note eine Abschätzung der absolut größten Nullstelle  $x_n$  von  $H_n(x)$ . Das Resultat  $2(n+1) - C_1^1(n+1)^{\frac{1}{2}} < x_n^2 < 2(n+1) - C_2^1(n+1)^{\frac{1}{2}}$  mit  $C_1^1 < 6,1$  und  $C_2^1 > 2,3$  bedeutet eine Verschärfung einer entsprechenden Abschätzung von Bottema [Proc. roy. Acad. Amsterd. **33**, 495. (1930)]. Lüneburg (Göttingen).

**Robert, Jean-Pierre:** Sur quelques propriétés des fonctions  $n$ -métaharmoniques. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1146—1148 (1931).

Im Anschluß an eine frühere Note (s. dies. Zbl. **1**, 65) werden verschiedene Eigenschaften von Potentialfunktionen auf Funktionen  $u(x, y)$  übertragen, die in einem Gebiet  $G$  der Differentialgleichung

$$\Delta^{(n)}u + \lambda_1 \Delta^{(n-1)}u + \dots + \lambda_{n-1} \Delta u + \lambda_n u = 0$$

genügen ( $n$ -metaharmonische Funktionen).

1. Ist  $\Sigma$  ein Kreis in  $G$  mit dem Radius  $\varrho$  und dem Mittelpunkt  $M_0$  und  $f(r, \varrho)$  eine in  $\Sigma$  integrable Funktion von  $r = M_0 m$ , die gewisse Orthogonalitätsbedingungen erfüllt, so gilt der Mittelwertsatz:

$$u(M_0) = \frac{1}{\pi \varrho^2} \iint_{\Sigma} f(r, \varrho) u(m) d\sigma_m.$$

2. Umkehrung: Eine in  $G$  summable, gleichmäßig beschränkte Funktion  $u(x, y)$ , die in jedem Kreis  $\Sigma$  in  $G$  die obige Mittelwerteigenschaft für eine gewissen Voraussetzungen unterworfenen Funktion  $f(r, \varrho)$  besitzt, ist in  $G$   $n$ -metaharmonisch. 3. Es ergibt sich der analytische Charakter von  $n$ -metaharmonischen Funktionen und die Konvergenz der Entwicklung von  $u(M)$  nach homogenen Polynomen in den Komponenten eines Radiusvektors  $M_0 M$  in jedem ganz in  $G$  gelegenen Kreis um  $M_0$ . Entsprechende Sätze gelten für mehrere Dimensionen. Lüneburg (Göttingen).

### Funktionentheorie:

**Shimizu, Tatsujirô:** On the domain of indetermination of a regular function. (Math. Inst., Imp. Univ., Tokyo.) Jap. J. Math. **7**, 275—300 (1931).

Es wird eine Funktion  $f(x + iy)$  betrachtet, die im Halbstreifen  $a < x < b, y > y_0$  regulär und beschränkt ist. Tsuji hat bewiesen: Wenn die Häufungswerte von  $f(a + iy)$  und  $f(b + iy)$  für  $y \rightarrow \infty$  zu den konvexen Bereichen  $A$  und  $B$  gehören, so haben die Häufungswerte von  $f((1 - \Theta)a + \Theta b + iy)$  die Gestalt  $(1 - \Theta)P + \Theta Q$ , wobei  $P$  in  $A$  und  $Q$  in  $B$  liegen. Verf. gibt eine Verallgemeinerung dieser Aussage, indem er  $f(x + iy)$  einer linearen Transformation unterwirft. Die Häufungswerte können dann allgemeiner in der Form

$$\frac{(1 - \Theta)P(Q - \omega) + \Theta Q(P - \omega)}{(1 - \Theta)(Q - \omega) + \Theta(P - \omega)}$$

bei beliebigem, außerhalb  $A + B$  fallendem  $\omega$  geschrieben werden. Dem Fall von Tsuji entspricht  $\omega = \infty$ . Durch logarithmische Transformationen werden andere Verallgemeinerungen erhalten. Zum Schluß wird auch noch der bekannte Satz von Lindelöf von der Konvexität der Funktion  $\mu(\sigma)$  in derselben Weise verallgemeinert.

L. Ahlfors (Åbo).

**Rauch, A.:** Généralisation de théorèmes de M. Valiron sur les fonctions méromorphes d'ordre positif. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1189—1191 (1931).

Die Milloux-Valironschen Untersuchungen über die Cercles de remplissage haben als Ausgangspunkt ein Theorem dieser Bauart: Es nehme  $f(x)$  in einem Kreise  $K$  3 Werte  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) höchstens  $N$ -mal an. Dann läßt sich zu jedem konzentrischen Teilkreise  $k$  eine Schranke  $W$  für die Wertverteilung von  $f(x)$  angeben;  $W$  gilt für alle Stellensorten  $z$  bis auf die aus einer Kugelumgebung  $U$  einer gewissen, möglichen Ausnahmesorte  $z_0$ ; für alle  $z$  bis auf diese hat jede Gleichung  $f(x) - z = 0$  in  $k$  höchstens



$W$  Lösungen; und  $W$  hängt ab von der Zahl  $N$ , vom Radienverhältnis der Kreise  $k$  und  $K$ , von der Kugeldistanz der  $a_i$  und vom Kugelradius der Ausnahmeumgebung  $U$ . Man hat diesen Satz schrittweise verallgemeinert, indem man an Stelle der Werte  $a_i$  Funktionen  $a_i(x)$  einführt, mit welchen  $f(x)$  im Kreise  $K$  an höchstens je  $N$  Stellen übereinstimmen darf. Verf. erzielt hier den abrundenden Erfolg, daß er für die  $a_i(x)$  alle meromorphen Funktionen zulassen kann, welche von kleinerer Ordnung als  $f(x)$  selbst sind. Die Kugeldistanz der  $a_i$  wird natürlich ersetzt durch einen Integralmittelwert über die  $a_i(x)$ . Dann läßt sich wie oben eine Schranke  $W$  angeben, die außerdem noch von der Zahl der Nullstellen und Pole der  $a_i(x)$  und ihrer Differenzen in  $K$  abhängt; aus dem erweiterten Theorem können alle Folgerungen auch in breiterer Front gezogen werden, wenn auch im wesentlichen die Gestalt der Sätze sich nicht ändert. Auch die  $z$  können durch Funktionen ersetzt werden. *Ullrich* (Marburg, Lahn).

**Bureau, Florent: Sur quelques propriétés des fonctions uniformes au voisinage d'un point singulier essentiel isolé.** C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1350—1352 (1931).

Es wird eine Verallgemeinerung des Schottkyschen Satzes angegeben: Bei diesem Satze nimmt man bekanntlich an, daß  $f(z)$  in dem Kreise  $|z| < R$  von 3 gegebenen Werten  $a, b, \infty$  verschieden bleibe. Hier wird statt des 2. endlichen Ausnahmewertes für  $f(z)$  angenommen, daß eine der Ableitungen  $f^{(n)}(z)$  einen Ausnahmewert habe. Dann gilt wieder eine Beschränktheitsaussage für  $f(z)$  auf jedem konzentrischen Teilkreise, ganz wie beim Satz von Schottky. Hieraus folgt natürlich ein Satz vom Landauschen Typus und ein neues Normalfamilienkriterium. Einige weitere Sätze können kaum als neu gelten, da sie einfachste Spezialfälle von Theoremen sind, welche Nevanlinna und der Referent 1929 gegeben haben. *Ullrich* (Marburg, Lahn).

**Takenaka, Satoru: On the distribution of zero points of the derivatives of an integral transcendental function of order  $\rho \leq 1$ .** (*Shiomi Inst., Osaka.*) Proc. imp. Acad. (Tokyo) **7**, 133—136 (1931).

Es wird das infinitäre Verhalten der Nullstellen der  $n$ -ten Ableitungen  $f^{(n)}(z)$  untersucht, wenn  $n$  gegen unendlich strebt. Verf. beweist seine Sätze in dieser Note für den Fall, daß  $f(z)$  eine ganze Transzendente vom Normaltypus  $\tau$  der Wachstumsordnung  $\rho = 1$  sei, d. h. daß  $(M(r))$  bezeichne wie üblich den Maximalmodul

$$\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} = 1 \text{ und der Typus } \tau = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r} \neq 0, \infty,$$

und gibt an, daß ähnliche Sätze für ganze Funktionen jeder endlichen Ordnung  $\rho$  gelten; die Beweise dafür sollen nächstens in den Proc. Phys. Math. Soc. Japan veröffentlicht werden. Es bezeichne  $a_n$  eine beliebige Nullstelle der  $n$ -ten Ableitung von  $f(z)$ . Dann gilt z. B.: Wie immer man eine Folge  $\{a_n\}$  auch auswähle, keine dieser Folgen ist konvergent (mit endlichem Grenzwert) und etwas allgemeiner: Zu keiner endlichen Stelle  $z_0$  gibt es eine Umgebung mit einem Radius kleiner als  $1/(e\tau)$ , in der noch fast alle Ableitungen von  $f(z)$  wenigstens eine Nullstelle haben. Der Beweis dieser interessanten Ergebnisse beruht auf einem allgemeinen Satze über die Entwickelbarkeit einer analytischen Funktion in eine Reihe nach analytischen Funktionen,  $g_n(z) = z^n(1 + h_n(z))$ , welche sich „nur wenig“ anders verhalten als die Potenzen, solange man in einem festen Kreise bleibt. *Ullrich* (Marburg, Lahn).

**Handt, Th., und H. Kneser: Beispiele zur Iteration analytischer Funktionen.** Mitt. naturw. Ver. Neuvorpommern **57/58**, 18—25 (1931).

Das Studium der Iterationen analytischer Funktionen  $a_1 z + a_2 z^2 + \dots$  läßt sich, wenn  $a_1$  Einheitswurzel ist, nach Fatou [Bulletin de la Société mathématique de France **47**, 161—271 (1919)] auf das Entsprechende von Funktionen zurückführen, die außerhalb eines die negativ reelle Achse ganz im Innern enthaltenden Bereichs regulär sind und Entwicklungen der Form  $f(z) = z + 1 + \frac{b}{z} + \frac{1}{z} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z^\gamma}\right)$  zulassen, wo  $\mathfrak{P}$  Potenzreihe ohne konstantes Glied und  $\gamma > 0$  ist. Fatou hat ferner gezeigt [a. a. O. und Journ



de Mathématique, sér. 9, 3, 1—49 (1924)], daß durch einen Grenzprozeß aus den Iterierten von  $f$  eine im selben Gebiet reguläre Funktion  $\varphi(z)$  mit folgender Eigenschaft gewonnen werden kann:  $\varphi(f(z)) = \varphi(z) + 1$ . Ist bei gegebenem  $f$  die Funktion  $\varphi$  bekannt, so lassen sich also die Iterationen von  $f$  auf die Iterationen der linearen Funktion  $y + 1$  zurückführen. Im allgemeinen wird aber die Bestimmung von  $\varphi$  nicht durchführbar sein. Dagegen erhält man bei gegebenem  $\varphi$  die Funktion  $f$  in einfacher Weise:  $f = \varphi^{-1}(\varphi(z) + 1)$ . Die Verff. bestimmen die zu zwei einfachen Funktionen  $\varphi(z + \log z)$  und  $\varphi(z + i \log z)$  gehörigen  $f$ . Unter Heranziehung einer für die „stetigen Iterierten“  $\varphi^{-1}(\varphi(z) + t)$  gültigen gewöhnlichen Differentialgleichung bezüglich  $t$  werden die  $f$  durch Abbildungseigenschaften charakterisiert. Sie bilden die längs eines Kurvenstückes aufgeschnittene Ebene umkehrbar eindeutig auf die längs eines anderen Kurvenstückes aufgeschnittene Ebene ab. Die Kurvenstücke werden explizit angegeben. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Maier, W.:** Zur Theorie der elliptischen Funktionen. *Math. Annalen* **104**, 745—769 (1931).

Der Verf. setzt hier seine in der früheren Arbeit: „Bernoullische Polynome und elliptische Funktionen“ [*J. f. Math.* **164** (1931); vgl. dies. Zbl. **1**, 282] begonnenen Untersuchungen fort, deren Zweck ist, die Theorie der elliptischen Funktionen auf die von Kronecker eingeführte, durch die Doppelreihe

$$s\left(\begin{matrix} x, y \\ u \end{matrix}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{e^{2\pi i(xk + yk)}}{u + k + \omega k}$$

definierte  $s$ -Funktion zu begründen. Im Mittelpunkt der vorliegenden Betrachtungen steht ein Additionssatz 2. Grades der  $s$ -Funktion. Der betreffende Satz, welcher dem bekannten Additionstheorem 4. Grades der Weierstrasschen  $\wp$ -Funktion entspricht, hat den Ausdruck

$$s\left(\begin{matrix} x, y \\ u \end{matrix}\right) s\left(\begin{matrix} \xi, \eta \\ v \end{matrix}\right) = s\left(\begin{matrix} x, y \\ u-v \end{matrix}\right) s\left(\begin{matrix} x+\xi, y+\eta \\ v \end{matrix}\right) + s\left(\begin{matrix} \xi, \eta \\ v-u \end{matrix}\right) s\left(\begin{matrix} x+\xi, y+\eta \\ u \end{matrix}\right),$$

wo

$$y - \omega x = z, \quad \eta - \omega \xi = \zeta, \quad J(\omega) > 0; \quad u, v, u-v, z, \zeta, z+\zeta \not\equiv 0 \pmod{1, \omega}.$$

Es wird hiernach näher auf die formale Analogie zwischen Bernoullischen Polynomen und elliptischen Funktionen eingegangen. Als Anwendung wird die spezielle Teilungstheorie elliptischer Integralperioden an einigen Beispielen erläutert. *Myrberg* (Helsinki).

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik:**

**Piaggio, H. T. H.:** Probability and its applications. *Math. Gaz.* **15**, 404—411 (1931).

**Lüneburg, Rudolf:** Das Problem der Irrfahrt ohne Richtungsbeschränkung und die Randwertaufgabe der Potentialtheorie. *Math. Annalen* **104**, 700—738 (1931).

Ein Partikel unternimmt einen polygonalen Irrweg auf der Ebene  $(x, y)$ ; jede Seite dieses Weges besitzt die Länge  $l$  und jede Richtung ist gleich wahrscheinlich. Es sei  $w(x, y; 0) dx dy$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Anfangspunkt der Irrfahrt im Flächenelemente  $dx dy$  liegt, und  $w(x, y; n)$  die entsprechende Wahrscheinlichkeit für die  $n$ te Ecke des Irrwegpolygons. Man kann  $w(x, y; n)$  durch die Rekursionsformel

$$w(x, y; n+1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(x + l \cos \varphi, y + l \sin \varphi; n) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{w}(x, y; n) d\varphi \quad (1)$$

berechnen. Der Verf. betrachtet als Grenzfall den Fall, in welchem der Anfangspunkt mit der Wahrscheinlichkeit 1 mit dem Koordinatenanfang übereinstimmt. Für  $n \geq 3$  sind die entsprechenden Funktionen  $w(x, y; n)$  stetig und können durch die folgende von Lord Rayleigh gefundene Formel dargestellt werden:

$$w(x, y; n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varrho J_0^n(\varrho l) J_0(\varrho r) d\varrho,$$



wobei  $J_0(x)$  die nullte Besselsche Funktion und  $r^2 = x^2 + y^2$  ist. Bei der Irrfahrt im dreidimensionalen Raume hat man (ebenso nach Lord Rayleigh)

$$w(x, y, z; n) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \varrho \left( \frac{\sin \varrho l}{\varrho l} \right)^n \sin \varrho r d\varrho.$$

$H(x, y; n) = w(x, y; 0) + \dots + w(x, y; n)$  multipliziert mit  $dx dy$  ist die mathematische Hoffnung im Verlauf von  $n$  Schritten, einmal das Flächenelement  $dx dy$  zu erreichen. Bei wachsendem  $n$  wächst  $H(x, y; n)$  über alle Grenzen. Im dreidimensionalen Falle konvergiert  $H(x, y, z; n)$  bei wachsendem  $n$  gegen einen endlichen Limes. Wenn man die Irrfahrt im beschränkten Gebiet  $G$  mit einem absorbierenden Rand  $\Gamma$  betrachtet, so muß man die Lösungen der Funktionalgleichung (1) suchen, die außerhalb  $G$  verschwinden. Der Verf. gibt noch die Lösung der Irrfahrtprobleme mit reflektierendem Rand, aber nur für eine rechteckige Berandung (mit Hilfe des Spiegelungsprinzips). Im zweiten Teile untersucht der Verf. die Lösungen der Funktionalgleichung

$$\odot u = \int_0^{2\pi} \tilde{u} d\varphi - 2\pi u = 0 \quad (2)$$

und zeigt, daß diese Gleichung sich in mehrfacher Hinsicht ganz analog der Laplaceschen Gleichung  $\Delta u = 0$  verhält. Wenn  $f(x, y)$  eine außerhalb des Gebietes  $G$  definierte stückweise stetige Funktion ist, so kann man immer eine und nur eine Funktion  $u(x, y)$  finden, welche im  $G$  der Gleichung (2) genügt und außerhalb  $G$  mit  $f(x, y)$  übereinstimmt. Unter der Voraussetzung, daß  $f(x, y)$  stetig ist, konvergiert diese Funktion  $u(x, y)$  mit  $l \rightarrow 0$  gegen die Lösung des Dirichletschen Problems für die Laplacesche Gleichung  $\Delta u = 0$  mit den Randbedingungen  $u(x, y) = f(x, y)$  auf dem Rande  $\Gamma$  von  $G$ .

A. Kolmogoroff (Moskau).

**Shewhart, W. A.: Random sampling.** Amer. math. Monthly 38, 245—270 (1931).

Der Verf. beabsichtigt in diesem Aufsatz Beiträge zur Theorie der Statistik zu liefern, die wichtige Anwendungen auf Probleme der praktischen Statistik gestatten sollen. Zur Begründung seiner Fragestellung weist der Verf. außer auf die durchgängige Verwendung statistischer Methoden bei der Auswertung physikalischer Messungsergebnisse insbesondere auf eine größere Reihe technischer Aufgaben hin, für deren statistische Behandlung die bisher entwickelten theoretischen Hilfsmittel nicht immer eine geeignete Handhabe böten. — Die Probleme, zu denen die vom Verf. angegebenen Beispiele führen, lassen sich auf 2 Typen zurückführen, die ungefähr so charakterisiert werden können: a) Aus einer Menge von Beobachtungsdaten Voraussagen über den Ausfall weiterer Beobachtungen herzuleiten, die unter denselben wesentlichen Bedingungen angestellt werden wie die ursprünglichen. b) Zu entscheiden, ob alle Elemente einer vorgelegten Menge empirisch gewonnener Daten unter denselben wesentlichen Bedingungen entstanden sind, ob also ihre Verschiedenheiten den zufälligen Schwankungen der unwesentlichen Bedingungen zuzuschreiben sind. Die Behandlung derartiger Probleme soll nun Aufgabe einer „Theorie der zufälligen Auswahlen“ sein; die letzteren definiert der Verf. als Auswahlen, „die unter solchen Bedingungen getroffen werden, daß das Gesetz der großen Zahlen auf sie zutrifft“. Dies Gesetz selbst wird in einer Formulierung eingeführt, die im wesentlichen eine unscharfe Fassung der Forderung darstellt, daß in einem Alternativkollektiv der Limes der relativen Häufigkeiten existieren soll. Der Verf. setzt in seiner Formulierung, die eine inhaltlich-physikalische Aussage darstellt, noch die Gleichheit der „wesentlichen Bedingungen“ voraus, aber dieser Begriff wird hier ebensowenig definiert wie bei der Formulierung der obigen Hauptprobleme. — Es werden nun an die genannten Fragestellungen einige stark an praktischen Gesichtspunkten orientierte Betrachtungen angeschlossen, die die prinzipiellen Schwierigkeiten unerörtert lassen. Eine Behandlung der aufgeworfenen Probleme unter systematischen Gesichtspunkten oder die Grundzüge einer eigentlichen Theorie



werden nicht gegeben. — Was insbesondere die zweite der obengenannten Problemgruppen angeht, so hält der Verf. die Einführung zweier Postulate für erforderlich. Diese beziehen sich auf die unbekannten Faktoren, die die Elemente statistischer Reihen mit beeinflussen, und hängen mit der Ansicht des Verf. zusammen, daß für die Beurteilung der „Güte“ zufälliger Auswahlen außer rein formalen statistischen auch noch apriorische Elemente eine Rolle spielen; diese Postulate werden indessen in einer Form ausgesprochen, die grundsätzlich die Möglichkeit einer Verifikation ausschließt.

*C. G. Hempel* (Berlin-Buch).

**Batiele, Edgar:** *Sur les probabilités relatives aux phénomènes intermittents et durées variables.* C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1429—1431 (1931).

L'A. si occupa dei fenomeni intermittenti a durata aleatoria: valga a chiarire il concetto l'es. tipico delle conversazioni telefoniche, che l'A. specialmente considera. Si determina anzitutto la probabilità  $p$  che sia in corso in un dato istante  $x$  dell'intervallo  $(0, X)$  un singolo fenomeno intermittente che in tale intervallo abbia luogo, e della cui durata è assegnata la legge di probabilità (nell'ipotesi, sottintesa, di probabilità uniforme in tutto l'intervallo considerato). Detta  $\bar{y}$  la durata media del fenomeno, è  $p = \bar{y} : (\bar{y} + X)$ , come l'A. dimostra per via analitica, chiarita anche geometricamente; una giustificazione intuitiva si ha osservando che  $p$  è il rapporto fra la durata media  $\bar{y}$  del fenomeno e la durata totale  $X$  dell'intervallo, corretta del termine additivo  $\bar{y}$  perchè il fenomeno può essere già in corso all'istante iniziale  $O$ . Ciò posto, applicando la formula di Bernoulli, si trova la probabilità  $p_n$  che in un dato istante  $x$  siano in corso esattamente  $n$  fenomeni, quando si sappia che  $N$  (sottinteso: indipendenti) ne ebbero luogo nell'intervallo  $(0, X)$ ,  $(0 < x < X)$ ; si deducono poi le formule semplificate valide per  $n$  piccolo rispetto ad  $N$ , e per  $\bar{y}$  piccolo rispetto a  $X$ . Nell'ultimo caso vale la formula di Poisson, già usata in telefonia automatica, ma in modo troppo semplicista, di cui l'A. discute i limiti d'applicabilità.

*Bruno de Finetti* (Roma).

## Geometrie.

**Schilling, Friedrich:** *Neue Beispiele von ebenen Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind.* Math. Annalen **104**, 672—699 (1931).

G. Hamel hat 1903 auf analytischem Wege diejenigen Geometrien in der Ebene und im Raume bestimmt, in denen die projektiven Geraden die kürzesten Verbindungslinien zwischen 2 beliebigen Punkten sind. Dazu gehören in der Ebene, auf die sich der Verf. beschränkt, außer den bekannten projektiven nicht euklidischen Geometrien die Geometrie Minkowskis mit einer Eilinie als Eichkurve und die Geometrie Hilberts mit einer ebensolchen Linie als Grenzkurve (absolute Kurve). Der Aufsatz bringt nun zu den Hamelschen Geometrien in anschaulicher und geometrischer Form neue Beispiele, die die verschiedenen Möglichkeiten illustrieren, aber im einzelnen hier nicht aufgezählt werden können. Hervorzuheben sind: das Verfahren, nach dem aus 2 oder mehreren solchen einfacheren Geometrien durch Überlagerung (Addition) neue gewonnen werden können, ferner die „geodätischen Pseudogeometrien“, die mit darstellend-geometrischen Problemen zusammenhängen.

*Eckhart* (Wien).

**Takasu, Tsurusaburo:** *Sur la généralisation projective et affine de la droite simsonienne.* Sci. Rep. Tôhoku Univ. (Math. etc.) **20**, 213—251 (1931).

Drei Geraden durch einen Punkt  $S$  mögen einen Kegelschnitt in den Punkten  $A_k, A'_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) schneiden.  $I$  sei ein 7. Punkt des Kegelschnittes. Dann liegen die Punkte  $P_1 = IA'_1, A_2A_3; P_2; P_3$  auf einer Geraden, die den Punkt  $S$  enthält. (Gerade von Aubert.) Läßt man  $S$  uneigentlich, den Kegelschnitt zu einem Kreise werden, so erhält man eine leichte Verallgemeinerung des Satzes von Simson:  $A_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) und  $I$  seien 4 Punkte eines Kreises.  $P_k$  seien 3 Punkte auf den Seiten des Dreiecks  $A_k$  derart, daß die Winkel  $\Theta_1 = \sphericalangle(IP_1, A_2A_3)$ ,  $\Theta_2, \Theta_3$  gleich sind. Dann liegen die Punkte  $P_k$  auf einer Geraden. (Simsonsche Gerade.) Es ist das Ziel



der Arbeit, bekannte Sätze über die Simonsche Gerade projektiv zu verallgemeinern. Die „erste projektive Verallgemeinerung“ ist die Aubertsche Gerade, die „zweite projektive Verallgemeinerung“ ergibt sich, wenn man den Kreis durch einen beliebigen Kegelschnitt, seine absoluten Punkte durch 2 beliebige Punkte des Kegelschnittes ersetzt. An Stelle des Winkels tritt ein konstantes Doppelverhältnis. In diesem Sinne werden Sätze von Greenhill und Dixon, Langley, Kobayashi und Kubota verallgemeinert und unabhängig von dieser Herleitung bewiesen. *E. A. Weiss.*

**Ichida, Asajiro: On four lines in hyperboloidic positions, II.** Sci. Rep. Tôhoku Univ. (Math. etc.) **20**, 252—259 (1931).

Wenn zwei zugeordnete Tetraeder so gelegen sind, daß die Lote (im euklidischen oder nichteuklidischen Sinne) von den Eckpunkten des ersten auf die entsprechenden Ebenen des zweiten hyperboloidische Lage haben, so haben nach einem Satze von T. Kubota auch die Lote von den Eckpunkten des zweiten auf die entsprechenden Ebenen des ersten hyperboloidische Lage. Der Verf. nennt die beiden Tetraeder dann orthohyperboloidisch. In der vorliegenden Arbeit untersucht er dreifach-, vierfach- und sechsfach-orthohyperboloidische Tetraeder. *E. A. Weiss (Bonn).*

**Cooper, Elizabeth Morgan: Perspective elliptic curves.** Amer. J. Math. **53**, 555 bis 572 (1931).

Zwei ebene Kurven heißen perspektiv, wenn zwischen den Punkten der ersten und den Tangenten der zweiten eine (1,1)-Korrespondenz derart hergestellt werden kann, daß jede Tangente der zweiten durch den entsprechenden Punkt der ersten läuft. So sind z. B. zwei Strahlenbüschel, die eine Kurve 2. Ordnung erzeugen, zu dieser Kurve perspektiv. Allgemeiner hat es, wenn man Erzeugungsmöglichkeiten einer Kurve untersucht, ein Interesse, nach Kurven vorgeschriebener Ordnung zu fragen, die zu ihr perspektiv sind. Die vorhandenen Arbeiten über perspektive Kurven beziehen sich auf den Fall (ebener und räumlicher) rationaler Kurven. Hier wird der Fall ebener elliptischer Kurven behandelt. Die Hauptresultate lauten: Es existieren  $\infty^{2m-n}$  zu einer vorgegebenen Kurve  $n$ ter Ordnung perspektive Kurven  $m$ ter Ordnung. Diese gruppieren sich zu  $\infty^1$  linearen Familien, deren jede einer birationalen Transformation der Kurve entspricht. Eine Kurve  $n$ ter Ordnung und eine zu ihr perspektive Kurve  $m$ ter Ordnung haben im allgemeinen  $m+n$  Berührungspunkte. Eine genauere Behandlung perspektiver elliptischer Kurven 3. Ordnung beschließt die Arbeit.

*E. A. Weiss (Bonn).*

**Harshbarger, Frances: The geometric configuration defined by a special algebraic relation of genus four.** Trans. amer. math. Soc. **33**, 557—578 (1931).

Gegenstand der Arbeit ist die geometrische Untersuchung der speziellen (3,3)-Korrespondenz  $F = t_1^3 \tau_1^3 \tau_2 + t_1^2 t_2 \tau_2^3 + t_1 t_2^2 \tau_1^3 - t_2^3 \tau_1 \tau_2^2 = 0$  zwischen den Parametern  $t$  und  $\tau$  zweier verschiedener binärer Gebiete. Die allgemeine (3,3)-Korrespondenz ist schon von Coble behandelt worden, der die beiden binären Gebiete auf zwei kubischen Raumkurven und die Gleichung  $F = 0$  als Inzidenzrelation zwischen Punkten der ersten und Ebenen der zweiten deutet. Die hier vorliegende spezielle Form hängt eng mit der Ikosaedergleichung zusammen und bleibt bei einer Gruppe  $G_{120}$  invariant. So sind auch alle bei der geometrischen Deutung der speziellen Form auftretenden geometrischen Figuren gegenüber den Transformationen einer  $G_{60}$  oder  $G_{120}$  invariant. Es ist das Ziel der Arbeit, die aus diesem Grund auftretenden besonderen Eigenschaften der Figuren zu studieren. Die beiden kubischen Raumkurven sind hier so aufeinander bezogen, daß jede Ebene der einen den entsprechenden Punkt der anderen enthält. Eine Kollineationsgruppe  $G_{120}$  transformiert jede der Kurven in sich oder vertauscht sie miteinander. Bringt man eines der Bündel von  $F^2$ , die einer der beiden  $C^3$  ein- oder umbeschrieben sind mit der zweiten zum Schnitt und bildet die Flächen des Bündels auf die Geraden einer Ebene ab, so erhält man in der Ebene eine rationale Kurve 6. Ordnung, die eine  $G_{60}$  trägt. Sie kann auch als Ort der Punkte gewonnen werden, in denen eine feste Ebene der ersten  $C^3$  von den Achsen dieser Kurve geschnitten wird,

die in den Ebenen der zweiten liegen. Im Zusammenhang mit ihr ergibt sich die gegenüber der Ikosaedergruppe invariante ebene Kurve 6. Ordnung vom Geschlecht 4. Schließlich wird das Gebüsch der Flächen 2. Ordnung, die zu den beiden, den  $C^3$  umschriebenen Bündeln von Flächen 2. Klasse apolar sind, auf die Punkte eines  $R_3$  abgebildet. Die Jacobische Fläche des Gebüsches, ihr Bild (ein Symmetroid) und die bei der dualen Abbildung auftretenden Bilder der beiden  $C^3$  (zwei rationale Raumkurven 6. Ordnung) werden näher untersucht. E. A. Weiss (Bonn).

**Zariski, Oscar:** On the irregularity of cyclic multiple planes. *Ann. of Math.*, II. s. 32, 485—511 (1931).

The irregularity  $p_g - p_a$  of the surfaces  $F$ , given by  $z^n = f(x, y)$ , is calculated; it is found as the sum of a series, the terms of which are multiples of superabundances of systems of curves of given order  $m - 3 - \beta$  ( $6 \leq \beta \leq m$ ), passing through the cusps of the branch curve  $f = 0$  of order  $m$ . Previously, the author has shown that, if  $f$  is irreducible and  $n$  a power of a prime number, the surface  $F$  is regular. From this follows that, for  $f$  irreducible, the above superabundances are zero for  $6 \leq \beta < n$ . From this the non-existence of curves of certain given Plücker characters follows (e.g.: order 7, no nodes, 11 cusps, class 9, 17 flexes, 7 double tangents). Furthermore, the necessary and sufficient condition for irregularity of the surface  $F$  (with  $f$  irreducible) is obtained as follows:  $n$  and  $m$  should be divisible by 6 and the system of curves of order  $m - 3 - m/6$ , passing through the cusps of  $f$ , should be superabundant. On the other side, topological considerations led to the theorem, that the surface  $F$  is always regular, if the fundamental (Poincaré) group of the curve  $f = 0$  with respect to its plane is cyclic. It follows that in this case, the above system of curves of order  $m - 3 - m/6$  cannot be superabundant. van der Waerden.

**Roth, L.:** Some properties of line congruences. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 27, 190—200 (1931).

Referring to previous papers (*Proc. Camb. Phil. Soc.* 25 [1929]; *Proc. Lond. Math. Soc.* [2], 32 [1931]) the author gives novel proofs of some theorems on line congruences, using the well-known representation of the lines of (3) by the points of a quadric form  $\Omega$  in (5). A congruence  $\Gamma$  of order  $m$  and class  $n$  corresponds to a surface  $F$  on  $\Omega$ , which meets the planes of the first and second systems in  $m$  and  $n$  points respectively. The other characters of  $F$  are:  $a$ , the rank of a prime section;  $j$ , the number of apparent pinch-points;  $c$ , the class;  $a$  is the rank of the scroll common to  $\Gamma$  and an arbitrary linear complex,  $c$  the rank of its focal surface  $\Phi$ ,  $j$  is the number of focal planes, passing through a given point and having a focus in a given plane. The author first considers theorems concerning the chords and tangents of  $F$ . The number of chords of  $F$  which pass through a given point of  $\Omega$  is  $r = mn - \frac{1}{2}a$ ;  $r$  pairs of rays of  $\Gamma$  are concurrent and coplanar with a given line  $l$ .  $F$  has  $d$  improper nodes; each such node corresponds to a ray  $l$ , which counts twice among the rays of  $\Gamma$  lying in a plane through  $l$ . The author proves

$$d = \binom{m}{2} + \binom{n}{2} - \frac{1}{2}j.$$

The order and the class of  $\Phi$  are found to be respectively:  $\mu = a - 2n$ ,  $\nu = a - 2m$ ; the order of the scroll  $S_2$  of rays with coincident foci is  $\varrho_2 = 2a - 2(m + n)$ ; the order of the curve of contact of  $S_2$  and  $\Phi$  is  $c_2 = j + c - a$ ; formulae are given for the double curve and the cuspidal curve of  $\Phi$ . Other properties of  $\Gamma$  are derived by considering the trisecants of  $F$ . To a trisecant of  $F$  corresponds a pencil formed by three concurrent and coplanar rays of  $\Gamma$ . The vertices of the pencils lie on the triadic surface  $T$ . A formula is given for the order of  $T$ , and for that of the intersection of  $T$  and  $\Phi$ ; the bifocal and trifocal scrolls are considered. It is possible that one or more planes of  $\Omega$  meet  $F$  in curves  $c_h$ ; such curves correspond to singular points and planes of  $\Gamma$ . The author supposes the case that  $\Gamma$  possesses  $\alpha_h$   $h$ -ple points and  $\beta_h$   $h$ -ple planes and gives the corresponding modifications of his formulae. Moreover he proves, that for a con-



gruence of given characters, the number and multiplicities of the singularities cannot be assigned arbitrarily. For congruences  $(2, n)$  he finds the well-known relations:

$$\sum \alpha_h = 18 - n; \quad \sum h \alpha_h = 4(n + 2), \quad \sum h^2 \alpha_h = 2n(n + 2), \quad \sum h^3 \alpha_h = (n + 2)^2(n - 1).$$

(Vgl. dies. Zbl. 1, 290.) O. Bottema (Groningen.)

**Finikoff, S.:** Congruences dont les deux nappes de la surface focale sont projectivement applicables l'une sur l'autre par les points focaux correspondants. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1175—1177 (1931).

Eine einfache Rechnung ergibt 5 Typen ( $D_1$  bis  $D_5$ ) solcher Kongruenzen; diese sind sämtlich  $R$ -Kongruenzen.  $D_1$  hat Regelflächen zu Brennflächen. Umgekehrt gibt es zu jeder Regelfläche  $F$  mit 2 Leitgraden  $\infty^3$  Kongruenzen  $D_1$ , deren eine Brennfläche  $F$  ist. Für die Brennflächen von  $D_5$  haben die 3 Fubinischen Differentialformen konstante Koeffizienten (projektive Minimalflächen). Die Laplace-Transformierten von  $D_3, D_4, D_5$  sind wieder Kongruenzen dieser 3 Typen. Die Laplace-Kette von  $D_5$  ergibt sogar lauter projektiv äquivalente Flächen. Auf den Brennflächen von  $D_3$  liegen 2  $D$ -Netze, auf denen von  $D_2$  und  $D_4$  nur 1, auf denen von  $D_1$  und  $D_5$  unendlich viele.

Stefan Cohn-Vossen (Köln).

**Rimini, Cesare:** Dimostrazione assoluta di un teorema di Gauss. Boll. Un. mat. ital. 10, 128—131 (1931).

In questa Nota si dà una dimostrazione assoluta rigorosa del celebre teorema di Gauss relativo alla invarianza per flessione della curvatura totale di una superficie.

Autoreferat.

**Tamerl, Arnulf:** Über die oskulierenden Drehzylinder einer gegebenen Raumkurve. Sitzgsber. Akad. Wiss., Wien, Math.-naturwiss. Kl., IIa 140, 1—10 (1931).

Es werden die Drehzylinder untersucht, welche eine gegebene Raumkurve berühren. Wenn im betrachteten Kurvenpunkt die Ableitung der Krümmung  $K' \neq 0$ , so gibt es höchstens 6 Zylinder, welche die Kurve in 4. Ordnung berühren. Wird lediglich Berührung 3. oder 2. Ordnung verlangt, so gibt es bestimmte Scharen von Zylindern. Es werden einige Sätze über die Lagen der Achsen der Zylinder dieser Scharen abgeleitet. Endlich werden einige Besonderheiten im Falle der Schraubenlinie untersucht.

Heinrich Schatz (Innsbruck).

**Calapso, R.:** Sulle superficie gobbe di terzo grado (del tipo di Cayley) legate al punto di una data superficie. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 495—498 (1931).

Die Spitzen der Kegel 2. Ordnung, die eine Raumkurve  $C$  in einem Punkt  $P$  6fach berühren, beschreiben eine Cayleysche Regelfläche 3. Ordnung  $R$ ; die Leitgeraden von  $R$  fallen in der Tangente  $t$  an  $C$  in  $P$  zusammen.  $P$  ist der uniplanare Punkt von  $R$ , die zugehörige Ebene ist die Schmiegungebene von  $C$  in  $P$ . Ist nun  $C$  Asymptotenlinie auf einer Fläche  $F$ , so steht  $R$ , wie Verf. zeigt, in gewisser Beziehung zur „Lieschen Quadrik“  $F_2$  von  $F$  in  $P$ . Z. B. sind alle geradlinigen Erzeugenden von  $F_2$ , die durch  $t$  gehen, enthalten in allen den linearen Komplexen, die bestimmt sind durch die krummen Asymptotenkurven von  $R$ , die ja Raumkurven 3. Ordnung sind. Beweis durch Rechnung.

Stefan Cohn-Vossen (Köln).

● **Edge, W. L.:** The theory of ruled surfaces. Cambridge: Univ. press 1931. VIII, 324 S. geb. 20/—.

Es werden die algebraischen Regelflächen bis zur 6. Ordnung einschließlich untersucht und klassifiziert. Zu diesem Zweck dienen 2 Methoden. Einmal wird das bekannte Kleinsche Modell der Liniengeometrie zugrunde gelegt, wo die Graden als Punkte, die Regelflächen als Kurven auf einer Hyperfläche 2. Ordnung des  $R_5$  erscheinen. Ferner erweist es sich als zweckmäßig, die Regelflächen des  $R_3$  als Projektionen von Regelflächen des  $R_n$  ( $n > 3$ ) zu betrachten. Für die Regelflächen 6. Ordnung ergeben sich 136 Typen. Die Darstellungsweise und Problematik des Werkes ist so faßlich und allgemein, daß man weit mehr daraus lernen kann als spezielle Liniengeometrie.

Stefan Cohn-Vossen (Köln).

**Vasseur, Marcel:** Sur une interprétation géométrique de la transformation de Moutard. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1177—1180 (1931).

Sei  $S$  eine Fläche, bezogen auf ein Netz konjugierter Richtungen, dessen Differentialgleichung in Tangentialkoordinaten gleiche Invarianten hat. Indem man auf die Tangentialkoordinaten die Moutardsche Transformation anwendet, erhält man eine Fläche  $S'$ , bezogen auf ein konjugiertes Netz von ebenfalls gleichen Tangentialinvarianten. Die Paare entsprechender Punkte auf  $S$  und  $S'$  erzeugen eine Strahlenkongruenz  $(G)$ , deren Torsen gerade die betrachteten Netze auf  $S$  und  $S'$  ausschneiden. Diesen Satz von Eisenhart leitet Verf. auf eine neue einfache Art ab und beweist ferner: Man betrachte neben  $(G)$  die zu  $(G)$  „duale“ Kongruenz  $(D)$  der Schnittgraden entsprechender Tangentialebenen von  $S$  und  $S'$ . Dann gibt es eine einparametrische Flächenschar  $S(\lambda)$ , die  $S$  und  $S'$  enthält, und deren je 2 beliebige Flächen zueinander und zu  $(G)$  und  $(D)$  in derselben Beziehung stehen wie  $S$  und  $S'$ ; d. h. bei veränderlichem  $\lambda$  durchlaufen die Punkte von  $S(\lambda)$  die Strahlen von  $G$ , und die zugehörigen Tangentialebenen drehen sich um die Strahlen von  $(D)$ . Verf. untersucht besonders den Fall, daß die Netze auf  $S$  und  $S'$  perspektiv liegen, und  $S$  eine Verbiegung gestattet, bei der das Netz konjugiert bleibt.

*Stefan Cohn-Vossen (Köln).*

**Menger, Karl:** Ein Problem von Blaschke. Anz. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturwiss. Kl. Nr **10**, 75—76 (1931).

Das Problem lautet: Von einer Fläche im euklidischen Raum sei bekannt, daß alle von einem beliebigen Flächenpunkt  $P$  auslaufenden geodätischen Linien durch einen weiteren Flächenpunkt  $P'$  gehen. Ist dann die Fläche notwendig eine Kugel? Ohne Bezugnahme auf den Raum kann man das Problem auch so fassen: Ein zweidimensionaler metrischer Raum  $R$  sei der Kugelfläche homöomorph.  $R$  sei mit einer Riemannschen Metrik versehen, und die geodätischen Linien mögen die erwähnte Eigenschaft haben. Ist dann  $R$  notwendig isometrisch zu einer Kugeloberfläche? Verf. untersucht die analoge Frage für den Fall einer beliebigen Metrik auf  $R$ , die nicht notwendig Riemannsch ist, für die aber die Dreiecksungleichung gilt. Verf. gibt an, daß die Frage dann zu verneinen ist; man könne Gegenbeispiele konstruieren, indem man innerhalb eines kleinen Kreises auf einer Kugelfläche die Metrik passend abändert. Ob eine solche Fläche sich längentreu im euklidischen Raum verwirklichen läßt, bleibt unentschieden.

*Stefan Cohn-Vossen (Köln).*

**Dusehek, A., und W. Mayer:** Über Räume konstanter Krümmung. Rend. Circ. mat. Palermo **55**, 129—136 (1931).

Introduction of projective coordinates into a Riemannian manifold of  $n$  dimensions in the following way. The manifold is defined by the integrability of the system of differential equations (the differentiation is covariant differentiation)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = -K g_{ik} \varphi, \quad K = \text{const}; \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Now we can select  $n$  integral manifolds  ${}_{(\alpha)}\varphi = \text{const}$ , of which the manifolds  ${}_{(\alpha)}\varphi = 0$  are mutual perpendicular. The manifolds  ${}_{(\alpha)}\varphi = \text{const}$ , are geodesically parallel to the manifolds  ${}_{(\alpha)}\varphi = 0$ . If  ${}_{(\alpha)}\nu^i$  denote the system of  $n$  vectors „adjoined“ to the system  $\partial {}_{(\alpha)}\varphi / \partial x_i$ , that is

$$\frac{\partial {}_{(\alpha)}\varphi}{\partial x_i} {}_{(\alpha)}\nu^k = \delta_k^i; \quad \frac{\partial {}_{(\alpha)}\varphi}{\partial x_i} {}_{(\beta)}\nu^i = \delta_{\alpha\beta},$$

$\delta$  being the Kronecker symbols, then it can be proved that the vectors  ${}_{(\alpha)}\nu^i$  are proportional to the gradient vectors of  $n$  manifolds  ${}_{(\alpha)}\varphi = \text{const}$ . These manifolds form a projective coordinate system, that is a system in which the geodesics are expressed by means of linear equations. It is interesting to compare this method with that of Bianchi (see for instance Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie 1899, p. 579).

*Struik (Cambridge).*



**Calapso, R.:** *Intorno alla prima direttrice di Wilczynski ed a problemi che a questa si connettono.* Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 417—419 (1931).

Anknüpfend an die dies. Zbl. 1, 353 referierte Arbeit (ibidem, 266—268; Bezeichnungen siehe dort) wird gezeigt: Sei  $K$  der die Linie  $C$  aus  $P$  projizierende Kegel; sei  $t$  die  $C$  nicht berührende asymptotische Tangente in  $P$ . Seien  $p_1, p_2$  die beiden Tangentenebenen durch  $t$  an  $K$ . Die zur Ebene  $tM$  in bezug auf  $p_1, p_2$  harmonisch konjugierte Ebene enthält die Wilczynskische Leitlinie. Čech (Brno, Č.S.R.).

**Kawaguchi, Akitsugu:** *Über projektive Differentialgeometrie zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten im vierdimensionalen Raume. (II. Mitt.)* (Math. Semin., Univ. Sapporo.) Jap. J. Math. 7, 267—273 (1931).

Eine  $F_2$ , die bis auf projektive Transformationen bestimmt ist, kann nach einer früheren Mitteilung des Verf. durch 5 Affinoren, zwischen denen noch eine Abhängigkeit besteht, festgelegt werden. Jetzt wird gezeigt, wie diese Affinoren durch 3 Affinoren und 2 Invarianten ersetzt werden können. Heinrich Schatz (Innsbruck).

**Cartan, Elie:** *Géométrie euclidienne et géométrie riemannienne.* Scientia (Milano) 49, 393—402 (1931).

Referat über die Prinzipien und die historische Entwicklung der nichteuklidischen Geometrien bis zu den allgemeinen Übertragungsgeometrien von Schouten und Verf.

Stefan Cohn-Vossen (Köln).

### Topologie:

● **Veblen, Oswald:** *Analysis situs.* 2. edit. (Amer. math. Soc. Colloquium publ. Vol. 5, Pt. II.) New York: Amer. math. Soc. 1931. X, 194 S. geb. \$ 2.—.

Die 2. Auflage des Veblenschen Buches unterscheidet sich von der 1. nur durch kleinere Veränderungen, die sich hauptsächlich auf die Darstellung des Begriffes des orientierten „circuit“ und auf den Beweis der Invarianz der Torsionskoeffizienten beziehen. Der Plan des Buches, die leitenden Gesichtspunkte und die Wahl und Disposition des Stoffes sind dieselben geblieben. Es liegt somit ein elementares Buch über die heute schon klassisch gewordenen Teile der allgemeinen  $n$ -dimensionalen Polyeder-topologie vor, welches vom Leser keine besonderen Vorkenntnisse, wohl aber eine gewisse allgemeine mathematische Kultur und Schärfe des mathematischen Denkens verlangt. Diesem elementaren und gleichzeitig allgemeinen Charakter des Buches entsprechend wird der größte Platz in der Darstellung von den sog. Homologieinvarianten eingenommen (wobei natürlich auch alle Invarianzbeweise gegeben werden). Die Darstellung bleibt aber auch hier durchaus im Rahmen der klassischen elementaren Theorie und verzichtet bewußt auf neuere Resultate von Alexander, Lefschetz, Hopf u. a. Dementsprechend findet der Leser von den topologischen Dualitätssätzen nur den Dualitätssatz von Poincaré, wobei auch die vom Verf. herrührende bekannte Verallgemeinerung desselben nur in einem (neu hinzugekommenen) Anhang gebracht wird. Der Homotopiebegriff und die daran anschließende Definition der Fundamentalgruppe wird, ähnlich wie in der 1. Auflage, im letzten, 5. Kapitel, dargestellt; dortselbst findet man auch das Heegaardsche Diagramm und eine kurze Bemerkung über das Knotenproblem. Neu hinzugekommen sind 2 Anhänge, die im wesentlichen 2 frühere Arbeiten des Verf. mit nur geringfügigen Abänderungen reproduzieren. Das sind: 1. The intersection numbers [aus Trans. Amer. Math. Soc. 25, 540—550 (1923)] und 2. On matrices whose elements are integers by O. Veblen and Ph. Franklin [aus Annals of Math. (2) 23, 1—15 (1921)]. Die Anordnung des Stoffes ist die folgende: Kap. I. Eindimensionale Komplexe. Kap. II. Zweidimensionale Komplexe und Mannigfaltigkeiten (hier wird im Spezialfall der zweidimensionalen Gebilde die Homologietheorie entwickelt; es werden ferner auch die Normalformen der geschlossenen orientierbaren und nicht orientierbaren Flächen abgeleitet). Kap. III.  $n$ -dimensionale Komplexe und Mannigfaltigkeiten. Hier findet man zunächst die elementaren geometrischen Konstruktionen des Kap. II (Unterteilungen usw.) auf den  $n$ -dimensionalen Fall verallgemeinert und dann die Homologietheorie modulo 2 (für  $n$ -dimensionale Komplexe)

mit den zugehörigen Invarianzbeweisen. Das Kap. IV ist der „orientierten“ Homologietheorie gewidmet (also im wesentlichen der Theorie der Bettischen Zahlen und der Torsionskoeffizienten), wiederum mit Invarianzbeweisen. Im Kap. V findet man den Homotopiebegriff, den Begriff der Fundamentalgruppe, ihre Beziehungen zu der eindimensionalen Bettischen Gruppe, die Überlagerungsräume usw. Wie bereits erwähnt, wird für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten auch das Heegaardsche Diagramm auseinandergesetzt.

P. Alexandroff (Moskau).

Niemytzki, V.: Über die Axiome des metrischen Raumes. Math. Annalen 104, 666–671 (1931).

Es sei  $R$  ein topologischer Raum, in dem sich eine Funktion  $\varrho(x, y) \geq 0$  (eine Entfernungsfunktion) so definieren läßt, daß ein Punkt  $x$  dann und nur dann der abgeschlossenen Hülle  $M$  einer (beliebigen) Menge  $M \subset R$  angehört, wenn die Entfernung  $\varrho(x, M)$  (d. h. die untere Grenze aller  $\varrho(x, y)$ , wobei  $y$  die ganze Menge  $M$  durchläuft) Null ist. Unter dieser Bedingung heißt  $R$  im weiteren Sinne metrisierbar. Ein im weiteren Sinne metrisierbarer Raum heißt symmetrisch, wenn man ihn (im obigen Sinne) so metrisieren kann, daß

$$\varrho(x, y) = \varrho(y, x) \quad (1)$$

ist. Ein im weiteren Sinne metrisierbarer Raum heißt ein  $\Delta$ -Raum, wenn man ihn so metrisieren kann, daß bei jeder Wahl der Punkte  $x, y, z$

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \quad (2)$$

ist. Ein im weiteren Sinne metrisierbarer Raum heißt im eigentlichen Sinne metrisierbar, wenn man ihn so metrisieren kann, daß die Entfernungsfunktion  $\varrho(x, y)$  der Gesamtheit der beiden Bedingungen (1) und (2) genügt. Es gelten nun folgende Tatsachen. I. Ein topologischer Raum ist dann und nur dann im weiteren Sinne metrisierbar, wenn er dem I. Abzählbarkeitsaxiom genügt. Dabei gibt es sogar unter den kompakten topologischen Räumen solche, welche zwar im weiteren Sinne metrisierbar, jedoch weder symmetrisch, noch  $\Delta$ -Räume sind. Dagegen bestehen die Sätze: II. Ein symmetrischer kompakter Raum ist im eigentlichen Sinne metrisierbar. III. Ein kompakter  $\Delta$ -Raum ist im eigentlichen Sinne metrisierbar. Verf. zeigt ferner an Beispielen, daß es nicht symmetrische  $\Delta$ -Räume und auch (sogar reguläre) symmetrische Räume gibt, die im eigentlichen Sinne nicht metrisierbar sind.

P. Alexandroff (Moskau).

Kamiya, Hitosi: An elementary proof of a theorem of L. Moore's on continuous curves. (Inst. of Math., Univ., Sendai.) Jap. J. Math. 7, 301–304 (1931).

Es handelt sich um den bekannten Satz, daß ein stetiges Streckenbild zu je 2 Punkten  $A$  und  $B$  einen Bogen (topologisches Streckenbild) mit den Endpunkten  $A$  und  $B$  enthält.

Nöbeling (Wien).

Hopf, Heinz: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Annalen 104, 637–665 (1931).

Zwei Abbildungen gehören zu derselben Klasse (Brouwer), wenn sie sich ineinander stetig überführen lassen. Die Abbildung  $f$  (von  $A$  auf  $B$ ) heißt wesentlich, wenn bei jeder Abbildung der durch  $f$  bestimmten Klasse die Bildmenge aus allen Punkten von  $B$  besteht. In unserem Falle ist  $A$  die dreidimensionale,  $B$  die zweidimensionale sphärische Mannigfaltigkeit, beide Definitionen gelten aber natürlich für beliebig allgemeine Gebilde. Das Hauptresultat ist: Satz I. Die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre  $S^3$  auf die zweidimensionale Sphäre  $S^2$  bilden unendlich viele verschiedene Klassen. Daraus folgt Satz Ia. Die  $S^3$  läßt sich wesentlich auf die  $S^2$  abbilden. Der Satz I folgt leicht aus dem Satz II. Jeder Abbildung  $f$  der  $S^3$  auf die  $S^2$  läßt sich eine ganze Zahl  $\sigma(f)$  zuordnen, die u. a. folgende Eigenschaften hat: a)  $\sigma(f) = \sigma(f')$ , wenn  $f$  und  $f'$  zu einer Klasse gehören; b) ist  $g$  eine Abbildung einer dreidimensionalen Sphäre  $S^3$  auf eine dreidimensionale Sphäre  $S^3$  mit dem Grade  $c$ ,  $f$  eine Abbildung der  $S^3$  auf die  $S^2$ , so ist  $\sigma(fg) = c \cdot \sigma(f)$ ; c) es gibt eine Abbildung  $f$  von  $S^3$  auf  $S^2$  mit  $\sigma(f) = 1$ . Der Fall beliebiger stetiger Abbildungen läßt sich mit den üblichen Methoden auf den Fall simplizialer Abbildungen zurückführen. Bei diesen treten aber als Originalmengen der Punkte von  $S^2$  gewisse Cyclen auf; es ergibt sich dabei, daß die eindimensionalen „Originalcyclen“ zweier verschiedener Punkte von  $S^2$



stets dieselbe Verschlingungszahl haben, und diese ist die Zahl  $\sigma(f)$ . Man kann sie auch definieren als den Grad, mit dem ein beliebiger, von dem Originalcyclus eines beliebigen Punktes von  $S^2$  berandeter (zweidimensionaler) Komplex  $K^2$  abgebildet wird. (Man kann von diesem Grade sprechen, denn das Bild  $f(K^2)$  ist ein Cyclus, der auf  $S^2$  liegt.) Eine Abbildung  $f$  mit  $\sigma(f) = 1$  wird am einfachsten wie folgt definiert. Der Euklidische  $R^4$  mit den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sei auf den Euklidischen  $R^3$  mit den Koordinaten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  folgendermaßen abgebildet

$$\xi_1 = 2(x_1 x_3 + x_2 x_4), \quad \xi_2 = 2(x_2 x_3 - x_1 x_4), \quad \xi_3 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2;$$

dadurch wird, wie leicht ersichtlich, die dreidimensionale Kugel mit dem Radius  $r$  um den Nullpunkt von  $R^4$  auf die zweidimensionale Kugel mit dem Radius  $r^2$  um den Nullpunkt des  $R^3$  abgebildet; insbesondere wird die dreidimensionale Einheitssphäre  $S^3$  des  $R^4$  auf die zweidimensionale Einheitskugel  $S^2$  des  $R^3$  abgebildet. Man beweist leicht, daß die Originalmenge eines beliebigen Punktes von  $S^2$  ein Großkreis ist. (Das System der so gewonnenen Großkreise ist übrigens eine Cliffordsche Parallelenkongruenz.) Schließlich beweist man ohne Mühe, daß bei jeder Abbildung  $f$  von  $S^3$  auf  $S^2$ , bei der als Originalmengen sämtlicher Punkte von  $S^2$  Großkreise auftreten, die Zahl  $\sigma(f)$  gleich  $+1$  oder  $-1$  ist (das Vorzeichen ist natürlich eine Frage der Orientierung). Um unseren kurzen Bericht über die Hopfsche Klasseninvariante  $\sigma(f)$  abzuschließen, erwähnen wir noch folgendes Resultat: Ist  $h$  eine Abbildung von  $S^2$  auf eine zweite Kugelfläche  $S_1^2$  vom Grade  $c$ ,  $f$  eine Abbildung von  $S^3$  auf  $S^2$ , so ist  $\sigma(hf) = c^2 \cdot \sigma(f)$ . Die weiteren Resultate der Arbeit ziehen die sog. algebraisch-wesentlichen Abbildungen in Betracht. Die Wesentlichkeit schlechtweg (so wie sie zu Beginn dieses Referates definiert wurde) heißt die topologische Wesentlichkeit. Die Abbildung  $f$  des Komplexes  $A$  auf die Sphäre  $S^n$  heißt algebraisch wesentlich, wenn es eine ganze Zahl  $m \geq 2$  und in  $A$  einen Cyclus  $Z^n$  modulo  $m$  gibt, dessen Bild in  $S^n$  nicht homolog Null, d. h.  $\sim c S^n$  mit einem modulo  $m$  von Null verschiedenen  $c$  ist. Eine algebraisch-wesentliche Abbildung ist, wie leicht ersichtlich, auch topologisch wesentlich. Im Falle, daß die Dimensionszahl des Komplexes  $A$  gleich  $n$  (Dimensionszahl der Sphäre) ist, gilt auch die Umkehrung der letzteren Behauptung, d. h. die algebraisch wesentlichen Abbildungen sind mit den topologisch wesentlichen identisch (Satz IV). (Wegen des Beweises dieses Satzes verweist der Verf. auf eine in dem *Recueil Mathem. de Moscou* neuerdings erschienene Arbeit von ihm: „Über wesentliche und unwesentliche Abbildungen von Komplexen.“) Wenn die Dimensionszahl von  $A$  kleiner als  $n$  ist, gibt es (trivialerweise) nur unwesentliche Abbildungen. Im Falle, daß die Dimensionszahl von  $A$  größer als  $n$  ist, ist außer den Sätzen I, Ia und II nur noch folgendes bekannt. Satz III. Die algebraisch unwesentlichen Abbildungen einer beliebigen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit auf die  $S^2$  bilden unendlich viele Klassen. Satz V. Eine Abbildung  $f$  eines beliebigen Komplexes  $A$  auf die Kreislinie  $S^1$  ist dann und nur dann topologisch wesentlich, wenn sie algebraisch wesentlich ist. Weitere Sätze beziehen sich auf algebraisch wesentliche Abbildungen. Das sind: Satz VI. Notwendig für die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit von  $A$  auf  $S^n$  ist, daß entweder die  $n$ -te Bettische Zahl oder die  $n-l$ -te Torsion von  $A$  von Null verschieden ist. Satz VII. Die Dimensionszahl von  $A$  sei  $\lambda$ . In den Fällen  $\lambda = n$ ,  $\lambda = n+1$ ,  $n = 1$  ist die im Satz VI ausgesprochene Bedingung auch hinreichend. Dagegen reicht diese Bedingung schon im Falle  $\lambda = 4$ ,  $n = 2$  nicht mehr hin: die komplexe projektive Ebene (die ja eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit ist) läßt sich nicht auf die  $S^2$  algebraisch wesentlich abbilden, obwohl für sie  $p^2 = 1$  ist.

P. Alexandroff (Moskau).

Stoilow, S.: Sur l'inversion des transformations continues de deux variables. C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1342—1344 (1931).

Verf. hat [Annales de l'Ecole Normale supérieure, sér. 3, 45, 347 (1928)] die eindeutigen stetigen Abbildungen ebener oder sphärischer Gebiete auf ebene (sphärische) Punktmengen mit den folgenden Eigenschaften untersucht. 1. Innere Punkte gehen bei der Abbildung in innere Punkte über. 2. Ein Kontinuum von Punkten geht stets wieder in ein Kontinuum (und nicht in einen Punkt) über. Für diese „transformations intérieures“ genannten Abbildungen wird der folgende Satz ausgesprochen und ein Beweis skizziert, der sich auf ein Hauptresultat der genannten Abhandlung stützt. In einem Gebiet  $r$  der Kugeloberfläche sei eine „transformation intérieure“ definiert, die  $r$  auf ein sphärisches Gebiet  $R$  so abbildet, daß jeder in  $r$  verlaufende, gegen den Rand von  $r$  strebende Weg in einen gegen den Rand von  $R$  strebenden Weg übergeht. Dann ist die Zusammenhangszahl (Zahl der Randkomponenten) von  $R$  nicht größer als die von  $r$ , und jeder Punkt von  $R$  ist Bild einer festen (endlichen) Zahl von (eventuell zusammenfallenden) Punkten von  $r$ . Der Satz enthält einen Satz von Hadamard [Bulletin de la Société mathématique de France 34, 71 (1906)]: Eine in der ganzen

Ebene  $\pi$  eindeutige stetige Abbildung auf eine andere Ebene  $\pi'$ , die im kleinen umkehrbar eindeutig ist und bei der jeder ins Unendliche laufende Weg wieder in einen solchen übergeht, ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung von  $\pi$  auf die volle Ebene  $\pi'$ .

W. Fenchel (Kopenhagen).

Hurewicz, W.: Dimensionstheorie und Cartesische Räume. Proc. roy. Acad. Amsterd. 34, 399—400 (1931).

Nach dem Mengerschen Fundamentalsatz läßt sich jeder  $n$ -dimensionale Raum  $R$  topologisch in den Euklidischen  $E_{2n+1}$  einbetten. Es erhebt sich die Frage, wie man  $R$  für beliebiges natürliches  $k$  auf eine  $n$ -dimensionale Teilmenge des  $E_{n+k}$  eindeutig und stetig derartig abbilden kann, daß möglichst wenig mehrfach bedeckte Punkte auftreten. Dies ist möglich, und zwar kann man erreichen, daß 1. jeder Bildpunkt nur endlich viele Originalpunkte hat, und daß 2. die Punkte mit mehr als einem Originalpunkt eine höchstens  $(n-k)$ -dimensionale Menge bilden. (Im Falle  $k = n$  kann hierin das Wort „nulldimensional“ durch „abzählbar“ ersetzt werden.) Es ist sogar möglich, jede vorgegebene eindeutige stetige Abbildung eines kompakten  $n$ -dimensionalen Raumes  $R$  auf eine Teilmenge des  $E_{n+k}$  durch eine beliebig kleine Modifikation in eine solche zu verwandeln, welche den Bedingungen 1. und 2. genügt. Durch diese Eigenschaft sind die höchstens  $n$ -dimensionalen kompakten Räume vermutlich gekennzeichnet.

Nöbeling (Wien).

## Mechanik der elastisch und plastisch verformbaren Körper.

Mises, R. v.: Über die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Kontinua. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 3—13 (1931).

Die im wesentlichen von Cauchy festgelegten Begriffsbildungen der klassischen Kontinuumsmechanik wurden bisher fast ausschließlich angewandt auf die ideale und die zähe Flüssigkeit und auf den ideal elastischen Körper mit unendlich kleinen Verrückungen. Diese 3 Typen idealisierter Körper reichen jedoch für die Bedürfnisse des Materialprüfungswesens bei weitem nicht aus, so daß auf diesem Gebiete vielfach in durchaus unzulänglicher Weise versucht wurde, jene Ansätze zu erweitern. Es ist daher sehr zu begrüßen, wenn von berufener Seite eine zusammenfassende Darstellung der zum Teil schon weit zurückreichenden anderen Ansätze der Kontinuumsmechanik gegeben wird, zumal wenn dies in so übersichtlicher Weise wie in der vorliegenden Arbeit geschieht. Die ideale und die zähe Flüssigkeit sowie der ideal elastische Körper mit unendlich kleinen Verrückungen werden nur kurz erwähnt, ausführlicher besprochen werden der elastische Körper bei endlichen Verrückungen, der Voigtsche elastische Körper mit innerer Reibung, die Maxwellsche zähe Flüssigkeit mit Relaxation, die Boltzmannschen und Volterraschen Ansätze der „Erinnerungs“-Mechanik. Alle diese Ansätze sind jedoch nicht geeignet, die kennzeichnenden Eigenschaften des plastischen Zustandes fester Körper, insbesondere der Metalle, wiederzugeben. Hier besteht einigermaßen Übereinstimmung nur hinsichtlich der Fließbedingung, d. i. hinsichtlich jener Bedingung, welche die Spannungen erfüllen müssen, damit der Körper sich im plastischen Zustand befindet. Die neueren Versuche an Metallen zeigen, daß mit sehr großer Annäherung die Summe der Quadrate der Hauptschubspannungen während des Fließens einen konstanten (oder doch nur langsam mit fortschreitender Verfestigung wachsenden) Wert hat. Diese Fließbedingung zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen ist jedoch nur in wenigen Sonderfällen hinreichend zur Lösung eines Randwertproblems für einen plastischen Körper (statisch bestimmte Probleme). Die seither vorgeschlagenen Ansätze für die Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen (Saint-Venant-Mises, Kármán, Hencky, Prandtl-Reuss) scheinen jedoch mit dem bildsamen Verhalten der Metalle nur teilweise in Einklang zu stehen (vgl. die Diskussionsbemerkung von K. Hohenemser, Göttingen). Die nächste Entwicklung der Theorie bleibender Formänderungen wird nach der Ansicht des Verf.



an den von ihm eingeführten Begriff des Fließpotentials anzuknüpfen haben: Eine bestimmte skalare Funktion der Spannungen, das Fließpotential, beherrscht die Vorgänge. Ihr jeweiliger Wert ist in erster Näherung zeitlos abhängig von den durchlaufenen Zuständen, welche durch die Werte einer dem Fließpotential analogen Funktion der Formänderungsgrößen gekennzeichnet werden. Es scheint, daß man dies durch eine Differentialbeziehung zwischen den Funktionswerten ausdrücken kann. Die Ableitungen des Fließpotentials nach den Spannungsgrößen sind den entsprechenden Deformationsgeschwindigkeiten proportional. *Prager* (Göttingen).

**Andruetto, Giacinta:** *Sulle equazioni intrinseche dell'equilibrio elastico.* Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 489—494 (1931).

**Kolossoff, M. G.:** *Sur le problème de Saint Venant pour une pièce courbe.* (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 58—59 (1931).

Als Saint-Venantsches Problem wird hier jenes verstanden, für einen zylindrischen oder prismatischen Körper eine solche Spannungsverteilung zu finden, bei der die einzelnen Längfasern keinerlei Querpressungen erleiden. Der Verf. untersucht die Frage, ob derartige Spannungsverteilungen auch für gekrümmte Stäbe möglich sind. Die Aufgabe wird für einen unvollständigen Kreisring formuliert, und hierzu werden Zylinderkoordinaten  $r, \theta, z$  und gewisse komplexe Zusammenfassungen der Koordinaten, der Spannungsgrößen und Verschiebungen eingeführt, die eine erhebliche Vereinfachung der Rechnungen zulassen. Sie führen auf die Integration der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 4\mu k = 0,$$

deren Lösungen die genannte Bedingung erfüllen. Im besonderen wird die Lösung für ein gewisses Oval und für den rechteckigen Querschnitt angegeben. *Th. Pöschl.*

**Suhara, Toyotarô:** *Thermo-elastic equations when the moduluses of elasticity are given as functions of the co-ordinates.* (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 90—95 (1931).

Die allgemeinen thermoelastischen Differentialgleichungen werden unter der Annahme formuliert, daß die lokale Temperaturverteilung als Funktion der Koordinaten gegeben ist, mithin die als temperaturabhängig vorausgesetzten elastischen Konstanten nebst thermischem Ausdehnungskoeffizienten des zu untersuchenden Systems sich durch Ortsfunktionen zum Ausdruck bringen lassen; die Dichte des Materials wird dabei als Konstante behandelt. Die Integration wird für den Fall eines unbegrenzt langen Kreishohlzylinders mit verschieden temperierter Innen- und Außenwandung bei Abwesenheit von Massenkraften sowie bei konstantem Ausdehnungskoeffizienten und konstanter Poissonscher Querkontraktionszahl durchgeführt, wobei für den Gleitmodul die Ansätze  $\mu = A(B + r)^k$  bzw.  $\mu = Ae^{Br}$  mit festem  $A, B$  und  $k$  zugrunde gelegt werden. Die praktische Brauchbarkeit der entwickelten Theorie wird durch Versuche an einem langen Stahlhohlzylinder mit kreisringflächenförmigem Profil bestätigt.

*Harry Schmidt* (Köthen).

**Honegger, E.:** *Zur Berechnung von Schraubenfedern mit Kreisquerschnitt.* (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 99—108 (1931).

Die Berechnung eines verdrehten Stabes mit Kreisquerschnitt und kreisförmig gebogener Mittellinie wird stark vereinfacht durch die Annahme, daß die Schubspannungslinien in einem Meridianquerschnitt Kreise sind, deren Mittelpunkt exzentrisch zum Mittelpunkt des Querschnittsrandes liegen, und daß die relative Verdrehung zweier benachbarter Querschnitte für alle Teile des Querschnittes gleich groß ist. Es wird der Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehwinkel berechnet. Für ein Verhältnis des Radius der Stabmittellinie zum Radius des Querschnittsrandes, welches größer als 4 ist, kann hierfür die übliche Beziehung für einen zylindrischen Stab genommen werden, dagegen ist die Abweichung der größeren Schubspannung von der

entsprechenden bei dem zylindrischen Stab beträchtlich. Auf Grund der Rechnungen für den verdrehten Stab mit gekrümmter Mittellinie werden einfache Berechnungsformeln für Schraubenfedern mit Kreisquerschnitt angegeben. *K. Hohenemser.*

**Vreedenburgh, C. G. J.:** Ein neues Berechnungsverfahren einfach statisch-unbestimmter Brückenkonstruktionen, mit einer Anwendung auf eine symmetrische Fachwerkbrücke auf drei Stützen. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **2**, 109—113 (1931).

Zur Berechnung der Stabkräfte in einem statisch unbestimmten Fachwerk ist bekanntlich die Kenntnis der Stabquerschnitte erforderlich, deren Dimensionierung selbst durch diese statische Berechnung erst ermöglicht werden soll. Man pflegt in der Konstruktionspraxis von geschätzten Stabquerschnitten auszugehen und sich mit einem Festigkeitsnachweis an Stelle einer Dimensionierung auf geringsten Materialverbrauch zu begnügen. Der Verf. stellt sich die Aufgabe, die Form der Einflußlinie für die statisch unbestimmte Größe in einem einfach statisch unbestimmten Fachwerk so zu bestimmen, daß der Materialverbrauch möglichst gering wird. Da die gesuchte Einflußlinie ein Polygon ist, enthält die Aufgabe nur endlich viele Unbekannte und kann auf die Auflösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt werden.

*Prager (Göttingen).*

**Szegö, St.:** Über die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme mittels konzentrierter Lastgruppen und die praktische Anwendung dieser Theorie auf die Berechnung des durchlaufenden Balkens. *Stahlbau* **4**, 124—127 (1931).

Die bisherige Berechnungsweise fußte auf passender Wahl der einzuführenden statisch unbestimmten Größen und Auflösung der sich ergebenden Elastizitätsgleichungen. Durch Annahme eines geeigneten Grundsystems und Einführung bestimmter Lastgruppen an den früheren Auflagerpunkten als statisch unbestimmte Größen läßt es sich erreichen, daß für alle Tragwerke gleichlautende (nur durch die Randglieder unterschiedene) Elastizitätsgleichungen entstehen. Diese werden ein für allemal nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren aufgelöst; es ergeben sich einfache Formeln für die Beiwerte zu den Belastungsgrößen, ausgedrückt durch die Systemabmessungen. Die statisch unbestimmten Größen werden als Integralsummen der Momentenfläche des belasteten Grundsystems mit einer virtuellen Momentenfläche gedeutet. Das Verfahren wird auf den durchlaufenden Balken angewandt und die allgemeine Anwendung auf beliebige Systeme angedeutet.

*S. Gradstein (Darmstadt).*

**Szegö, St., und P. Neményi:** Über eine allgemeine Methode zur Darstellung der Einflußlinien von Balken und Rahmentragwerken. *Stahlbau* **4**, 150—153 (1931).

In einer früheren Arbeit von P. Neményi (*Z. f. ang. Math.* **1930**, H. 4) waren die Einflußlinien als Biegelinien des unveränderten Tragwerkes für bestimmte konzentrierte Lastgruppen gedeutet: Bringt man in einem Punkte des Tragwerks eine der 4 Lastgruppen 1. bis 4. Ordnung (Einzellast, Einzelmoment, Doppelmoment, Doppelangriff) an, so ist die entstehende Biegelinie gleichzeitig Einflußlinie einer statischen Größe in dem betreffenden Punkte (Durchbiegung, Neigungswinkel, Biegemoment, Querkraft). Zur Anwendung dieser Sätze auf vielfach statisch unbestimmte Tragwerke sind die zu der Lastgruppe gehörigen statisch unbestimmten Größen zu ermitteln, was auf graphischem oder analytischem Wege (vgl. vorstehendes Ref.) geschehen kann. Die in beiden Fällen zur Ermittlung der Einflußlinien dienenden Verfahren werden beschrieben und an einem Zahlenbeispiel durchgeführt. *S. Gradstein.*

**Vasiliauskas, K.:** Die Clapeyronschen Gleichungen bei der Berechnung von zwei-stielligen und geschlossenen Rahmen. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **2**, 131—144 (1931).

Verwendung der Clapeyronschen Gleichungen zur statischen Berechnung von Zweigelenkrahmen, zweifach eingespannten und geschlossenen Rahmen. Die Berechnungsweise ist derjenigen auf Grund des Bleichschen Viermomentensatzes sehr nahe verwandt.

*Prager (Göttingen).*



**Hanna, W. S.:** A new method of calculating secondary stresses. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 145—149 (1931).

Berücksichtigung des versteifenden Einflusses, den die Knotenbleche auf die Biegeformänderungen der Fachwerkstäbe und damit auf die Nebenspannungen ausüben. Vergleich mit Versuchsergebnissen. *Prager (Göttingen).*

**Stone, M.:** The general torsion problem. Solution by electric analogy. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 167—170 (1931).

Die Spannungsfunktion für das Torsionsproblem eines prismatischen Stabes genügt der Differentialgleichung  $\Delta u = -k$  mit auf der Querschnittsberandung verschwindendem  $u$ . Der Verf. schlägt die folgende Art der experimentellen Behandlung dieser Gleichung vor: Setzt man  $u(x, y) = -\frac{k}{4}(x^2 + y^2) + v(x, y)$ , so genügt  $v$  der Differentialgleichung  $\Delta v = 0$  und nimmt die Randwerte  $\frac{k}{4}(x^2 + y^2)$  an. Die Funktion  $v$  kann nun als elektrisches Potential in einer planparallelen Platte (Modellplatte) gefunden werden, welche die Form des Stabquerschnittes hat. Zur Erzeugung der richtigen Randwerte von  $v$  wird diese Platte auf eine zweite kreisrunde Platte (Grundplatte) gelegt, deren Dicke so mit der Entfernung  $r$  vom Mittelpunkt veränderlich ist, daß nach Anlegen einer Spannung am Plattenumfang und Erden des Mittelpunkts das Potential in der Grundplatte proportional  $r^2$  wird. Damit durch Auflegen der Modellplatte die Potentialverteilung in der Grundplatte nicht gestört wird, muß die Leitfähigkeit der letzteren groß sein im Vergleich zu derjenigen der Modellplatte. Versuchsergebnisse werden nicht mitgeteilt. *Prager (Göttingen).*

**Pollaczek-Geiringer, H.:** Beitrag zum vollständigen ebenen Plastizitätsproblem. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 185—190 (1931).

Das ebene Spannungsproblem für einen überall im plastischen Zustand befindlichen Körper ist eine statisch bestimmte Aufgabe, die ohne Eingehen auf Verschiebungen gelöst werden kann, falls die Randbedingungen nur Aussagen über die Spannungen enthalten. Aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen und der Fließbedingung (Schubspannungsbedingung) lassen sich die beiden Normalspannungen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  eliminieren, die so entstehende hyperbolische Differentialgleichung für die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  hat bekanntlich die Hauptschublinien zu Charakteristiken. Das Netz dieser Hauptschublinien kann nach R. v. Mises [*Z. angew. Math. u. Mech.* 5, 147 (1925)] so gezeichnet werden, daß die eine Schar von Diagonalkurven die Isoklinen der Hauptschublinien, die andere die Isobaren, d. h. die Linien konstanter mittlerer Normalspannung sind. Das Verschiebungsproblem kann unter Zugrundelegung des Saint-Venant-Miseschen Körpers unabhängig vom Spannungsproblem gelöst werden. Dabei führt man, wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, zweckmäßigerweise die Komponenten  $u$  und  $v$  der Verschiebungsgeschwindigkeit in Richtung der Hauptschublinien ( $\alpha$ - und  $\beta$ -Richtung) ein; die Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten nehmen dann die einfache Form an:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

d. h. die Hauptschublinien sind auch Charakteristiken des Verschiebungsproblems, also Gleitlinien. Eine einmal gefundene Lösung dieses Differentialgleichungssystems kann man in jedes Gleitliniennetz eintragen, so ist z. B.  $u(\alpha, \beta) = v(\alpha, \beta) = C \cdot e^{-(\alpha + \beta)}$  eine in jedem Gleitliniennetz mögliche Strömung, bei der die Stromlinie in jedem Punkt mit den beiden durch diesen Punkt gehenden Hauptschublinien den Winkel  $\pi/4$  einschließt. An Hand der angegebenen Differentialgleichungen können Verschiebungsrandwertaufgaben der ebenen Plastizitätstheorie unter Verwendung des Riemannschen Integrationsverfahrens gelöst werden. Als Beispiele werden behandelt die Strömung in der Umgebung einer zylindrischen, unter innerem Überdruck stehenden Boh-

rung in einem plastischen Körper und der unendlich ausgedehnte, ganz plastizierte Körper zwischen 2 parallelen, gegeneinander bewegten Druckplatten. *Prager.*

**Nádai, A.: Zur Theorie plastischer Zustände.** (*Research Labor., Westinghouse Electric & Mfg. Comp., East-Pittsburgh, Pa.*) (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **2**, 191—196 (1931).

1. Tur Theorie der Fließfiguren: Für die Stromfunktion der ebenen plastischen Verformung in einem Körper, der lediglich in einer Richtung auf Zug oder Druck beansprucht ist, gilt eine hyperbolische Differentialgleichung, deren Charakteristiken unter  $45^\circ$  zur Zug- oder Druckrichtung verlaufen. Es ergeben sich so kinematisch mögliche Fälle der Verformungen mit Unstetigkeiten längs der Charakteristiken (Fließlinien), die sich mit Beobachtungen zum Teil decken.

2. Die Theorie der plastischen Torsion wird durch Berücksichtigung der Verfestigung erweitert, indem ein allgemeineres Gesetz zwischen Schubspannung und Schiebung,  $\tau = f(\gamma)$ , angenommen wird. *K. Hohenemser (Göttingen).*

**Reiner, Markus: Die Plasticodynamik weicher Stoffe.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24. bis 29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **2**, 197—202 (1931).

Bei nicht homogenen Flüssigkeiten, den dispersen Systemen, ist der Zähigkeitskoeffizient bzw. sein reziproker Wert, die Fluidität, nicht mehr unabhängig von den Geschwindigkeiten. Manche von diesen Flüssigkeiten können Spannungen bis zu einem bestimmten Betrag aufnehmen, ohne daß eine merkliche Strömungsgeschwindigkeit entsteht. Das Verhalten dieser Flüssigkeiten kann in erster Annäherung beschrieben werden durch einen Ansatz, der die Verschiebegeschwindigkeit proportional setzt der Differenz von Schubspannung und „Grenzschubspannung“. Für Flüssigkeiten mit verschwindender Grenzschubspannung aber anormaler Zähigkeit versucht Reiner aus physikalischen Überlegungen über den Aufbau der dispersen Systeme einen Exponentialansatz zwischen Fluidität und Schubspannung plausibel zu machen.

*K. Hohenemser (Göttingen).*

**Lagally, M.: Spaltenbildung in zähflüssigen Körpern.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24. bis 29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **2**, 203—209 (1931).

Eine von C. Somigliana durchgeführte Behandlung des Problems der stationären Strömung einer sehr zähen Flüssigkeit in einem zylindrischen Gerinne gestattet es, aus den Oberflächengeschwindigkeiten, der Sohlentiefe und der Sohlenneigung des Gerinnes die Zähigkeitskonstante zu ermitteln. Die Massenkräfte werden dabei vernachlässigt. Verschiedene Geschwindigkeits- und Profilmessungen an Gletschern ergaben wenig abweichende Werte für die Zähigkeitskonstante (etwa  $10^{14}$  c.g.s.-Einheiten), woraus Lagally schließt, daß die Behandlung des Eises als sehr zähe Flüssigkeit wahrscheinlich erlaubt sei. Unter dieser Annahme werden die Spannungen für einige Fälle bestimmt. Die Spalten in Gletschern verlaufen in vielen Fällen senkrecht zu den Linien der größten Zugspannung, so daß die Vermutung einer größten nicht überschreitbaren Zugspannung in Eis naheliegt. Nimmt man die Existenz einer größten Zugfestigkeit auch bei anderen zähen Flüssigkeiten an, z. B. bei den Schmierölen, dann folgt daraus, daß die Schmiermittelschicht zwischen einer umlaufenden Welle und dem Lager bei einer bestimmten Umfangsgeschwindigkeit zerreißen muß, derart, daß sich Spalten bilden, die unter  $45^\circ$  zur radialen Richtung von der Welle aus in das Innere der Schicht hineinwachsen.

*K. Hohenemser (Göttingen).*

**Tanimura, T.: The shrinkage and strength of built-up cylinders.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **2**, 349—359 (1931).

In einem dickwandigen Rohr, welches durch Innendruck beansprucht wird, entstehen die gefährlichsten Spannungen an der Innenwand. Je nachdem, welche Größe man bei kombinierten Spannungen als maßgebend für die Höhe der Beanspruchung ansieht, erhält man verschieden hohe Werte für den höchst zulässigen Innendruck. Wählt man nacheinander als maßgebend die größte Hauptspannung, die größte Hauptdehnung, die Verzerrungsenergie, die Misessche Fließbedingung und die größte Haupt-



schubspannung, dann erhält man abnehmende Werte für den maximalen Innendruck, so daß bei einem Verhältnis des äußeren zum inneren Radius von 3 : 1 die Theorie der größten Hauptschubspannung nur etwa den halben größten Innendruck zuläßt gegenüber der Theorie der größten Hauptspannung, wenn beide Male die gleiche Streckgrenze des Materials angenommen wird. Spannt man den Zylinder durch einen zweiten darübergeschrumpften Zylinder oder durch eine Drahtumwicklung vor, dann erhöht sich der größt zulässige Innendruck wesentlich. Auch dieser Fall wird unter Zugrundelegung aller erwähnten Beanspruchungskriterien behandelt. Denkt man sich unendlich viele dünne Zylinder derart übereinandergeschrumpft, daß bei Aufbringen eines Innendruckes alle Fasern gleichmäßig hoch beansprucht werden, dann hat man den denkbar günstigsten Fall, der ebenfalls unter Verwendung der genannten Beanspruchungshypothesen eingehend diskutiert wird.

K. Hohenemser (Göttingen).

**Sadowsky, Michael: Theorie der elastisch biegsamen undehnbaren Bänder mit Anwendungen auf das Möbiussche Band.** (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 444—451 (1931).

Nach anschaulicher Beschreibung der einerseits für Seile bzw. Drähte, andererseits für Bänder charakteristischen Eigenschaften wird die Definition des Bandes analytisch dahin formuliert, daß das aus dem Tangentenvektor  $\bar{t}$ , dem Normalenvektor  $\bar{n}$  und dem Binormalenvektor  $\bar{b}$  gebildete begleitende Dreiein der nicht ausdehnbaren Mittellinie materiell, d. h. mit der Materie des Bandes fest verbunden ist. Die mit dieser kinematischen Eigenschaft verträglichen virtuellen Verdrehungen des begleitenden Dreieins der Mittellinie werden unter Benutzung der Frenet-Serretschen Formeln der Kurvengeometrie bestimmt, wobei sich für die virtuelle Drehung des Dreieins in einem Punkt  $Q$  der Mittellinie relativ zum Dreiein in dem um  $ds$  längs der Mittellinie von  $Q$  entfernten Punkt  $P$  die Relation  $d\delta\vartheta = (\bar{t}\delta W + \bar{b}\delta K)ds$  ergibt ( $W$  = Windung,  $K$  = Krümmung der Mittellinie), die neben  $\delta ds = 0$  die Grundlage der Theorie der Bänder bildet. Unter Beschränkung auf unendlich schmale Bänder werden sodann die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen formuliert, die zu 6 Differentialgleichungen für die auf das begleitende Dreiein bezogenen Komponenten derjenigen Kraft und desjenigen Momentes führen, auf die sich die in einem Normalschnitt des Bandes übertragenen Spannungen reduzieren lassen; sie enthalten überdies  $W$  und  $K$ , und sie sind daher durch den Zusammenhang zwischen Deformation und Spannung zu ergänzen, der durch das Prinzip der virtuellen Verrückungen geliefert wird. Als Beispiel wird das Möbiussche Band behandelt, dessen elastisches Potential vom Verf. früher (Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. 1930) angegeben wurde; dabei ergibt sich, wie am Schluß der Arbeit kurz deduziert wird, die bemerkenswerte Tatsache, daß das Möbiussche Band aus einem ebenen rechtwinkligen Dreieck besteht, an dessen beide Katheten sich das krumme analytische Band stetig und mit stetiger Tangentialebene, jedoch mit unstetiger Krümmung anschließt.

Harry Schmidt (Köthen).

**Sadowsky, Michael: Das nichtanalytische elastische Potential. Theorie und Beispiele.** (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 2, 452—454 (1931).

Bezeichnet man mit

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$J_2 = \gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2 - 4\varepsilon_x\varepsilon_y - 4\varepsilon_x\varepsilon_z - 4\varepsilon_y\varepsilon_z,$$

so schlägt der Verf. in Anlehnung an die Annahme, daß das Spannungs-Dehnungsdiagramm aus 2 verschiedenen geraden Linien für den Zug- und Druckversuch besteht, eine Theorie vor, für die der Ausdruck der Formänderungsarbeit lautet

$$F = \frac{1}{2} \left( \frac{A_1 + A_2}{2} + \frac{A_1 - A_2}{2} \operatorname{sgn} J_1 \right) J_1^2 + \frac{1}{2} G J_2$$

( $A_i = E_i \frac{m(m-1)}{(m+1)(m-2)}$ ,  $i = 1, 2$  mit  $E, m, G$  entsprechend der üblichen Bedeutung).

Bei Torsion bzw. Dilatation ohne Vorzeichenwechsel im Inneren des Körpers tritt keine Änderung gegenüber der klassischen Theorie ein, wohl aber im Falle der reinen Biegung. Der Verf. gibt an, daß für einen Balken mit rechteckigem Querschnitt ein der klassischen Theorie analoger Ansatz, bei dem die Verschiebungen Polynome 2. Grades der Ortskoordinaten sind, unmöglich ist, so daß auch das Gradliniengesetz für die Normalspannungen hier nicht mehr gilt.

Paul Funk (Prag).

### **Stabilitäts- und Schwingungsprobleme:**

**Trefftz, E.:** Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichtes aus der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 44—50 (1931).

Es wird gezeigt, wie man unter Vermeidung der üblichen Linearisierung zu Stabilitätskriterien auf Grund des Prinzips vom Minimum der gesamten potentiellen Energie, ausgedrückt durch die elastischen Verschiebungen, gelangt. Um den Ausdruck für die Formänderungsenergie zu gewinnen, setzt der Verf. die Komponenten des Verzerrungstensor an in der Form  $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}$ , wobei  $G_{\mu\nu}$ , bzw.  $g_{\mu\nu}$  die Koeffizienten des Linien-elementes vor bzw. nach der Deformation bedeuten. Es wird sodann entsprechend den Vorschriften der Invariantentheorie bzw. in Anlehnung an den üblichen Ausdruck für die Formänderungsarbeit der Ausdruck für die Deformationsarbeit gebildet in der Form  $A = \int \int \int a \Delta dx_1 dx_2 dx_3$  mit  $\Delta = \sqrt{|g_{\mu\nu}|}$ , wobei die  $x_i$  mit dem Massenteilchen verbundene Koordinaten bedeuten, welche im undeformierten Zustand gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten sind. Um den vollständigen Ausdruck der gesamten potentiellen Energie zu bilden, müssen noch hinzugefügt werden die von den Massen- und Oberflächenkräften herrührenden Bestandteile. Diese letzteren Bestandteile liefern Integrale, deren Integranden lineare Funktionen der Verschiebungsgrößen sind, wobei die Koeffizienten die gegebenen äußeren Kräfte sind, und welche daher für die Bildung des Ausdruckes der zweiten Variation nicht in Betracht kommen. Irgend eine Gleichgewichtslage ist eine solche, für die die erste Variation verschwindet, und stabil ist sie dann, wenn sich die zweite Variation als positiv erweist. Der Verf. führt die Untersuchung entsprechend den Vorschriften der Variationsrechnung am speziellen Beispiel der Ermittlung der Knicklast für einen beiderseits eingespannten Stab durch. Dabei denkt er sich entsprechend der Einspannung die axiale Verschiebung an der einen Endfläche  $z = 0$ ,  $W = 0$ , an der anderen  $z = l$ ,  $W = -h$  (konstant) gegeben, während andere Randbedingungen zum Teil aus der Variationsrechnung selbst gefolgt werden. Für den zu untersuchenden Gleichgewichtszustand ergeben sich die Verschiebungskomponenten unmittelbar aus dem Ansatz in der Form  $U = \varepsilon_x x$ ,  $V = \varepsilon_y y$ ,  $W = \varepsilon_z z$ . Durch Nullsetzen der zweiten Variation folgt dann für die „gefährlichste Variation“ ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen, welche die gesuchte kritische Belastung als Parameter enthalten. Diese ist sodann als der kleinste Eigenwert des Systems zu ermitteln. Für den Fall des Stabes mit kreisförmigem Querschnitt ist die Durchrechnung dieses Systems nach Angabe des Verf. von Kreutzer, Dresden, durchgeführt worden, wobei sich eine Abweichung von der Eulerschen Knicklast um 1% ergab.

Paul Funk (Prag).

**Melan, Ernst:** Über die Stabilität von Stäben, welche aus einem mit Randwinkeln verstärkten Bleche bestehen. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 59—65 (1931).

Die Aufgabe wird behandelt als Stabilitätsproblem der in der  $x$ -Richtung durch den Druck  $\sigma$  beanspruchten Platte, d. h. als Eigenwertproblem der Differentialgleichung  $\Delta \Delta w + \frac{\sigma h}{D} w_{xx} = 0$ , wenn mit  $w$  die Durchbiegung,  $D$  die Steifigkeit,  $h$  die Dicke der Platte bezeichnet wird. Die Wirkung der Gurte (Randwinkel) auf das Verhalten des Blechs wird unter der Annahme, daß ihre Breite klein ist, gegen die Breite der Platte, als „Randbedingung“ berücksichtigt. Die die Eigenwerte (krit. Span-



nungen) charakterisierende transcendente Gleichung zeigt, daß für genügend lange Bleche ( $a/b \approx 10$ ) die Eulerformel, in der (das übliche Verfahren) Blech und Gurte zusammen als „Stab“ behandelt werden, gültig bleibt. Für breitere Bleche wird eine andere Näherungsgleichung nötig, die durch einen versuchsweisen Ansatz an Stelle der ziemlich komplizierten charakteristischen Gleichung eingeführt wird. Aus den Wurzeln dieser (quadratischen) Gleichung ergibt sich die kritische Spannung dann ohne Schwierigkeit.

K. Marguerre (Karlsruhe).

**Federhofer, Karl: Berechnung der Kipplasten gerader Stäbe mit veränderlicher Höhe.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 66—72 (1931).

Es handelt sich um die Ermittlung des Einflusses eines veränderlichen Stabquerschnittes auf die Größe der Kipplasten bei geraden Stäben für folgende Fälle: 1. einseitig eingespannter Stab mit Einzellast  $P$  am freien Ende, 2. an beiden Enden festgehaltener Stab mit Einzellast in der Mitte. — Die Differentialgleichung für den Verdrehungswinkel  $\beta$  lautet für 1., wenn  $C$  die Verdrehungssteifigkeit und  $A$  die Biegesteifigkeit bedeutet,

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{1}{C} \frac{dC}{dx} \frac{d\beta}{dx} + \frac{P^2(l-x)^2}{AC} \beta = 0.$$

Für einen rechteckigen Querschnitt konstanter Breite, dessen Höhe sich nach dem Potenzgesetz ändert, wird die Differentialgleichung durch Besselsche Funktionen integriert und die Kipplast als kleinste Wurzel von gewissen, solche Funktionen enthaltenden Gleichungen gefunden. Für linear veränderliche Höhe des Querschnittes wird die Kipplast aus einer Reihenentwicklung erhalten. Ebenso im Falle 2. Den Schluß bildet die näherungsweise Berechnung der Kipplast nach der Ritzschen Methode.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

**Nicolai, E.: Über den Einfluß der Torsion auf die Stabilität rotierender Wellen.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 103—104 (1931).

Verf. behandelt die Stabilität einer rotierenden schlanken Welle unter Berücksichtigung des von der Welle aufgenommenen Drillungsmomentes. Die Welle ist in 2 Lagern frei laufend gedacht; in der Mitte der Welle ist eine runde Scheibe aufgekeilt, auf die ein konstantes Drehmoment wirkt; ein Widerstandsmoment wirkt nur auf einen Endquerschnitt der Welle. Auf Grund der vom Autor aufgestellten Störungsgleichungen zieht er den Schluß, daß die Bewegung einer solchen Welle immer instabil sei. Da dieses Ergebnis aber der Erfahrung durchaus widerspricht, so glaubt Verf. den Grund der Stabilität der tatsächlichen Bewegung in dissipativen Kräften sehen zu müssen.

A. Andronow und A. Witt (Moskau).

**Krug, C., und H. Schlechtweg: Über den Spannungszustand in umlaufenden scheibenförmigen Körpern.** Ing.-Arch. 2, 212—221 (1931).

Die Arbeit stellt die Diskussion einer von H. Schlechtweg in der Z. angew. Math. u. Mech. 1931 (s. dies. Zbl. 1, 361) gegebenen Formel für den Spannungszustand in Schleifscheiben dar. Das Problem der Bruchgefahr bei umlaufenden Schleifscheiben wurde durch die Arbeiten Grüblers und v. Bachs in den 90er Jahren diskutiert — ohne zufriedenstellendes Resultat. Insbesondere blieb der Widerspruch zwischen Zugversuch und Sprengversuch ungeklärt. Durch die von Sch. unter Zugrundelegung eines nichtlinearen Spannungs-Dehnungsgesetzes durchgeführte Rechnung werden die besonders auffälligen Resultate Grüblers wenigstens zum Teil richtiggestellt, vor allem erweist sich die (gefährliche) innere Ringspannung wirklich als kleiner als bei rein elastischen Verhältnissen. Die noch verbleibende Unstimmigkeit führen die Verff. auf den Mangel an einer einwandfreien Bruchhypothese zurück. Immerhin scheint gerade die eingehende Diskussion der „Kennlinien“ (Spannung als Funktion der Radien, der Drehzahl und der besonderen elast. Konstanten  $B$ ) in der vorliegenden Arbeit zu zeigen, daß der neue Ansatz dem wahren Sachverhalt wesentlich näherkommt. — In einer leicht anwendbaren Näherungsformel werden die Ergebnisse für gewisse gebräuchliche Scheibenabmessungen zusammengefaßt.

K. Marguerre (Karlsruhe).

**Frost, Thos. H., and K. F. Whitecomb:** The stresses in rotating disks. (*Dep. of Phys., Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge.*) Trans. amer. Soc. mechan. Eng. **53**, 1—11 (1931).

Spannungsoptische Untersuchungen, die die Verff. an rotierenden Zelluloidscheiben vorgenommen haben, lassen hinsichtlich der Spannungsverteilung eine befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie feststellen. *E. Weinel* (Göttingen).

**Schwerin, E.:** Ein allgemeines Integrationsverfahren für quasiharmonische Schwingungsvorgänge. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **3**, 125—137 (1931).

Vgl. dies. Zbl. **1**, 17.

**Schmidt, Harry:** Zur Berechnung von Schwingungen elastischer Systeme unter dem Einfluß beweglicher Belastungen. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **3**, 138—142 (1931).

Der Verf. erläutert sein Rechenverfahren zunächst an einem beiderseits gestützten Stab. Dabei geht er so vor, daß die Lösung in Form von komplexen unendlichen Integralen gewonnen wird, die nach Cauchy in Partialbrüche zerlegt werden, unter Heranziehung einer früher vom Verf. abgeleiteten Formel. Die numerische Diskussion der entstandenen Reihen bietet hierauf keine weiteren Schwierigkeiten. Die Schwingungen, welche unter dem Einfluß einer beweglichen Lastverteilung entstehen können, werden in analoger Weise am Beispiel eines gespannten Seiles behandelt. *M. J. O. Strutt*.

**Goodier, J. N.:** Vibrations of railway bridges. Trans. amer. Soc. mechan. Eng. **53**, 13—25 (1931).

Der Verf. untersucht die Schwingungen von Brücken, welche durch die unausgeglichene Massen der Lokomotive hervorgerufen werden, den Einfluß der Zugbewegung, der Federung der Lokomotive und den Einfluß der Dämpfung. Dabei wird die Brücke aufgefaßt als Stab mit evtl. veränderlichem Querschnitt. Auf Grund vereinfachender Annahmen wird nur die Grundfrequenz berechnet. *W. Meyer zur Capellen* (Koblenz).

**Dungen, F. H. van den:** Les coefficients d'influence harmonique. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **3**, 150—153 (1931).

Behandlung erzwungener Schwingungen elastischer Systeme mittels Integralgleichungen, Deutung des Kerns als statische, des lösenden Kerns als dynamische Einflußfunktion. Anwendung auf zusammengesetzte Systeme (Rahmen), falls die lösenden Kerne für die getrennt betrachteten Teile (Stiele, Riegel) bekannt sind. Beeinflussung der Schwingungen eines Balkens durch einen an diesem angebrachten Schwingungsmesser. *Prager* (Göttingen).

**Klotter, Karl:** Die elastischen Querschwingungen belasteter Systeme. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **3**, 154—160 (1931).

Betrachtet werden Saiten, Stäbe, Membranen und Platten, die außer ihren Eigenmassen noch weitere Massen tragen, die auf Punkte oder Linien zusammengedrängt sind. 2 derartige Systeme von gleichen geometrischen Abmessungen und gleichen elastischen Eigenschaften werden als monolithisch verbunden bezeichnet, wenn das resultierende System die gleichen geometrischen Abmessungen und elastischen Eigenschaften hat wie die Teilsysteme, und wenn sowohl die Eigenmasse wie die Zusatzmasse des resultierenden Systemes durch Addition der entsprechenden Massen der Teilsysteme gebildet werden. Ist das Verhältnis von Zusatzmasse zu Eigenmasse für beide Systeme das gleiche, so ergeben sich die Eigenfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  beider Teilsysteme aus derselben Frequenzgleichung und die Eigenfrequenz  $\omega$  des zusammengesetzten Systems aus der Beziehung:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2}.$$

Es wird gezeigt, daß diese Formel für die niedrigste Eigenfrequenz des zusammengesetzten Systemes auch dann einen recht guten Näherungswert liefert, wenn man die Voraussetzung gleichen Massenverhältnisses beider Teilsysteme fallen läßt, also z. B. ein



gegebenes belastetes System zerlegt in 2 leichter zu behandelnde Teilsysteme, von denen das eine keine Zusatzmasse, das andere keine Eigenmasse besitzt. *Prager.*

**Den Hartog, J. P.: Forced vibrations with combined viscous and coulomb damping.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 181—189 (1931).

Für ein mechanisches System von einem Freiheitsgrad werden die Amplituden der stationären Schwingungen angegeben, die dem Paar von Differentialgleichungen

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} \pm F = P(\cos \omega t + \varphi)$$

genügen. Die Rechnungsergebnisse [ausführlicher in *Phil. Mag.* (7) 9, 801 (1930)] werden in 7 Figuren dargestellt, die die Amplituden der Schwingungen in Abhängigkeit von  $\omega/\omega_n$  angeben ( $\omega_n^2 = k/m$ ). Die 7 Parameterwerte  $c/c_c$  sind 0 (reine Coulombsche Reibung); 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 und 0,5. Mit  $c_c$  ist der Wert der Dämpfungskonstanten bezeichnet, für den die Bewegung aperiodisch wird,  $c_c = 2\sqrt{km}$ . Es wird berichtet, daß die Rechnungsergebnisse in befriedigender Weise mit den Ergebnissen von Versuchen übereinstimmen, die für Torsionsschwingungen angestellt wurden.

*K. Klotter (Karlsruhe).*

**Parodi, M. H.: Étude sur les oscillations des systèmes de transmission par bielles des locomotives électriques.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 234—250 (1931).

Bei Untersuchung der an elektrischen Lokomotiven beobachteten elastischen Schwingungen (hervorgehoben dadurch, daß das betr. System im Ruhezustand statisch unbestimmt ist), erhält man eine Differentialgleichung 2. Ordnung 1. Grades mit periodischen Koeffizienten. Der Verf. findet durch Betrachtung der Fälle, wo die homogene Differentialgleichung periodische Lösungen hat, daß nicht eine Reihe diskreter Geschwindigkeiten auftreten, wo sehr große Ausschläge auftreten, sondern gewisse Gebiete. Ausführlich zeigt der Verf., wie man mit Hilfe nomographischer Methoden die Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung finden kann für das Gebiet  $T - 2T$ , wenn die Lösung im Gebiet  $0 - T$  bereits (graphisch oder rechnerisch) gefunden ist. Zum Schluß wird noch ein eigenartiger Apparat vorgeführt zur Integration der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  (auf welche Form man die behandelte Differentialgleichung bringen könnte).

*W. Meyer zur Capellen (Koblenz).*

**Vaulot, M.: Les petits mouvements des fils pesants. Application à la mesure des tensions des fils télégraphiques.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 255—266 (1931).

Es werden die kleinen Bewegungen eines elastischen, an 2 festen Punkten gehaltenen Seiles in 3 Koordinatenrichtungen gegenüber der Gleichgewichtslage untersucht. Als Sonderfall wird ausführlich das homogene, schwere Seil betrachtet, bei welchem die Bewegungen senkrecht zur Ebene des Gleichgewichtes von den anderen unabhängig sind. Als Gleichgewichtsform wird eine Parabel bzw. eine Sinuslinie angenommen. — Endliche Bewegungen werden kurz durch Vergleich mit einem mechanischen Pendel gestreift.

*W. Meyer zur Capellen (Koblenz).*

**Breguet, L.: Oscillation du véhicule aérien. Suspension aérodynamique.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 267 bis 274 (1931).

**Borowička, Hubert: Theorie der Kraftdämpfung beim elastischen Längstoß zylinderförmiger Stäbe.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 3, 301—310 (1931).

Der Verf. meint, daß es sich bei diesem Problem „letzten Endes um eine beschränkte Anwendungsmöglichkeit der allgemeinen Prinzipien der Mechanik handelt. Sogar das Gegenwirkungsprinzip erfährt eine Einschränkung. Die gleichzeitige Verwendung der äußeren und inneren Massengeschwindigkeit verlangt neue Formen der mathemati-

schen Fassung der Prinzipien . . .“ — Das Problem ist längst mit exakten Mitteln behandelt worden (so von Boussinesq, Saint-Venant u. a.), ohne daß sich je Bedenken dieser Art ergeben hätten.

*Th. Pöschl* (Karlsruhe).

## Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

● **Kaufmann, Walther:** *Angewandte Hydromechanik. Bd. 1. Einführung in die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung der Flüssigkeiten.* Berlin: Julius Springer 1931. VIII, 232 S. u. 146 Abb. RM. 12.50.

Der vorliegende 1. Band der „Angewandten Hydromechanik“ gibt eine Einführung in die Grundlagen; die eigentlichen „Anwendungen“ (Hydraulik, Theorie der Kreiselräder usw.) sind nicht berührt. Das Buch wendet sich aber durchaus an den Ingenieur bzw. den Studierenden der T.H. etwa vom 5. Semester an. Es verlangt vom Leser ungefähr die mathematische Vorbildung, die die sog. „höhere Mathematik“ an der T.H. zu vermitteln pflegt: die Ableitung der Grundgesetze erfolgt am „Element“, von der Vektorrechnung ist kein wesentlicher Gebrauch gemacht. Was das Buch zur Zeit besonders wertvoll erscheinen läßt, ist die Verarbeitung der neueren Forschungsergebnisse über Fragen der Turbulenz, der Geschwindigkeitsverteilung, des Widerstandes — obwohl diese Ergebnisse ja überwiegend experimenteller Natur sind. Der ebenen Potentialströmung, die gerade für die Anwendungen eine so große Bedeutung gewonnen hat, ist ein besonderer Abschnitt gewidmet. Die Einteilung des Stoffes selbst ist übersichtlich: Hydrostatik, eindimensionale Strömung der idealen und der wirklichen Flüssigkeit, mehrdimensionale Strömung der idealen und (etwas gedrängter) der zähen Flüssigkeit.

*K. Marguerre* (Karlsruhe).

**Olsson, Ol.: Über einen integrierbaren Fall der Hamel-Oseenschen hydrodynamischen Differentialgleichung.** Ark. Mat. etc. 22 A, Nr 19, 1–36 (1931) [Schwedisch].

Der Verf. behandelt die Integration der Differentialgleichung:

$$\frac{d^4 f(\varphi)}{d\varphi^4} + (2a - C\varrho') \frac{d^3 f(\varphi)}{d\varphi^3} + (a^2 + b^2 - Ca\varrho') \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} - b\varrho' \frac{df(\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} = 0, \quad (1)$$

wobei  $a, b, C, \varrho'$  reelle, gegebene Konstanten sind. Zur Lösung wird der Ansatz gemacht:  $u = u_0 + ku_1 + k^2 u_2 + \dots$ , wo  $u = df(\varphi)/d\varphi$  ist und  $k = \frac{1}{2}(2a - C\varrho')$ . Es wird die einschränkende Annahme gemacht, daß man Ausdrücke vernachlässigen kann, die  $k$  in höherer als der 1. Potenz enthalten. Dann ergibt sich für (1)

$$\left( \frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} + b'' u_0 + b' u_0^2 \right) + k \left( \frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + b'' u_1 + 2b' u_0 u_1 + 2 \frac{d u_0}{d\varphi} \right) = c_1, \quad (2)$$

wo  $c_1$  eine Integrationskonstante ist und  $b'' = b^2 - \frac{C^2 \varrho'^2}{4}$ ;  $b' = -\frac{1}{2} b \varrho' > 0$ . Die Gleichung (2) kann nun in die beiden Differentialgleichungen aufgespalten werden:

$$\frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} + b'' u_0 + b' u_0^2 = c_1, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + (b'' + 2b' u_0) u_1 + 2 \frac{d u_0}{d\varphi} = 0. \quad (4)$$

Das Integral der Gleichung (3) lautet: (sn, cn, dn Jacobische Fkt.)

$$u_0 = \varrho_1 - (\varrho_1 - \varrho_2) \operatorname{sn}^2 \Phi, \quad \text{wo } \Phi = \sqrt{\frac{b' \varrho_1}{6}} (\varphi - \varphi_0); \quad (5)$$

$$\left. \begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{3b''}{4b'} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{16b'c_1}{3b''^2}} \right).$$

Für die Gleichung (4) existiert das partikuläre Integral:  $u_1^{(1)} = \operatorname{sn} \Phi \operatorname{cn} \Phi \operatorname{dn} \Phi$ .

Hiermit ergibt sich schließlich:

$$u = u_0 + k u_1^{(1)} [c_3 + c_2 J^{(2)} + \sigma J^{(3)}], \quad (6)$$

wo

$$J^{(2)} = \int_{u_1^{(1)2}} d\Phi; \quad J^{(3)} = \int_{u_1^{(1)2}} J^{(1)} d\Phi; \quad J^{(1)} = \int \operatorname{sn}^2 \Phi \operatorname{cn}^2 \Phi \operatorname{dn}^2 \Phi d\varphi;$$

$c_2, c_3$  Integrationskonst. und  $\sigma = 4 \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\sqrt{b' \varrho_1 / 6}}$ . In einem zweiten Abschnitt wird die oben angegebene Lösung (6) umgerechnet unter Benutzung der  $\vartheta$  Funktionen und



Anwendung von Fourierreihen. Zum Schluß werden die Integrationskonstanten  $c_1, c_2, c_3$  aus folgenden Bedingungen bestimmt:

$$c_1 = \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_0} + 2k \left( \frac{du}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} + b''(u)_{\varphi=\varphi_0} + b'(u)_{\varphi=\varphi_0}^2. \quad (7)$$

$$(u)_{\varphi=\varphi_0} = \varrho_1 + k \cdot \lim_{(\Phi=0)} \{ \sin \Phi [c_2 J^{(2)} + \sigma J^{(3)}] \}, \quad (8a)$$

woraus: 
$$c_2 = 1/k [\varrho_1 - (u)_{\varphi=\varphi_0}], \quad (8)$$

$$\frac{1}{k} \left( \frac{du}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = c_3 \lim_{(\Phi=0)} [c_2 J^{(2)} + \sigma J^{(3)} + u_1^{(1)} \cdot z], \quad (9a)$$

wo

$$u_1^{(1)} z = \frac{c_2}{u_1^{(1)}} + \sigma \frac{J^{(1)}}{u_1^{(1)}}$$

und woraus:

$$c_3 = \frac{1}{k} \left( \frac{du}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} - \sigma \lim_{\Phi=0} J^{(3)}. \quad (9)$$

Das Ergebnis der ganzen Rechnung ist, daß die Strömungsgeschwindigkeit  $u$  stets endliche Werte hat und daß die Geschwindigkeit dieser Bewegung nicht periodisch ist.

J. J. Sommer (München).

Eisner, F.: Das Widerstandsproblem. (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.)

Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. 1, 23—42 (1931).

Der Verf. gibt im wesentlichen eine gekürzte Darstellung seines zusammenfassenden Berichtes von 1929 über das Widerstandsproblem (Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern; Mittlg. H. 4 der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau. Berlin: Julius Springer 1929). Im 1. Teil wird über diejenigen Ansätze berichtet, welche bei der Berechnung des Körperwiderstandes die reibungslose Flüssigkeit zugrunde legen (Kirchhoffsche Plattenströmung, Kármánsche Wirbelstraße, induzierter Widerstand der Prandtlschen Tragflügeltheorie). Die Vorstellung ist hierbei die, daß die ideale Flüssigkeit nur unter Hinzunahme von Diskontinuitäten und freien und gebundenen Wirbeln ein vereinfachtes Bild der wirklichen Flüssigkeitsströmungen zu geben vermag. Die ideale Flüssigkeit wird dadurch zur „Flüssigkeit mit verschwundener, aber einmal dagewesener Reibung“. In der Theorie der zähen Flüssigkeit werden die beiden Grenzfälle sehr kleiner und sehr großer Reibung behandelt. Die Prandtsche Grenzschichttheorie liefert einen numerischen Wert für den Widerstand allerdings nur für den Fall des reinen Reibungswiderstandes (tangentiell angeströmte Platte), aber sie ist für die physikalische Einsicht in das ganze Problem von grundlegender Bedeutung, da sie die Ablösung und die Wirbelbildung und damit das Auftreten des Kielwassers erklärt. Anschließend an Prandtls Züricher Vortrag wird in zwei neuen Göttinger Arbeiten (Swain und Schlichting) die Kielwasserströmung als ein turbulenter Ausbreitungsvorgang aufgefaßt. Weiter wird berichtet über die bekannten Oseenschen Ansätze, die durch Aufspaltung der Bewegung in Grundströmung und Störungsbewegung von den Trägheitsgliedern in den Differentialgleichungen die quadratischen Glieder der Störungsbewegung vernachlässigen, aber die „halbquadratischen“ Glieder der Grundströmung beibehalten, und so zu den für kleine Reynoldssche Zahlen gültigen „erweiterten Stokesschen“ oder Oseenschen Gleichungen führen, welche ein einseitiges Kielwasser hinter dem Körper ergeben. Oseens „asymptotische Theorie“, die für sehr große Reynolds-Zahlen Gültigkeit haben soll, und die in einem Grenzübergang in den erweiterten Stokesschen Gleichungen besteht, ist nach Ansicht des Verf. von zwei Überlegungen ausgegangen. Einmal treten in den für kleine Reynoldssche Zahlen  $R$  aufgestellten erweiterten Stokesschen Gleichungen Glieder auf, die sich bei sehr großem  $R$  vereinfachen, und zweitens wünschte man zu wissen, ob die Theorie der zähen Flüssigkeit im Grenzübergang zu verschwindender Reibung mit der klassischen idealen Strömung oder mit der Kirchhoffschen Totwassertheorie mehr Ähnlichkeit hat oder keiner von beiden gleicht. Oseen erhält nach Ausführung des Grenzüberganges im ganzen Feld vor und neben dem Körper Potentialströmung, aber innerhalb eines den Körper berührenden Zylinders hinter dem Körper ein Wirbelgebiet. Die Flüssigkeit gleitet auf der Vorderseite des Körpers und haftet auf der Hinterseite. Dem positiven Ergebnis der Oseenschen Theorie, nämlich, daß sich aus den hydrodynamischen Differentialgleichungen überhaupt ein Kielwasser ergibt, steht als Mangel gegenüber ein Drucksprung auf der Kielwassergrenze und das Nichtzusammenfallen von Stromlinien und Linien konstanter Wirbelstärke. Der Druck im Kielwassergebiet ergibt sich nicht eindeutig, und damit bleibt der Widerstand unbestimmt. Burgers hat 1930 eine zweite Näherung der asymptotischen Theorie gerechnet, die stetigen Druck ergibt und auch eine numerische Aussage über den Widerstand gestattet für die senkrecht angeströmte Kreisplatte ergibt sie den Widerstandsbeiwert  $c_w = 2,08$  in guter Übereinstimmung mit dem Experiment).

H. Schlichting (Göttingen).

**Bairstow, L.: Aircscrew theory. A summary.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 43—57 (1931).

Eine Übersicht über den letzten Stand der Luftschraubentheorie, im wesentlichen unter Beschränkung auf englische Arbeiten. Seitenweise Zitate der Originalabhandlungen. Berücksichtigt sind die Untersuchungen von Betz, Prandtl und Goldstein über schwach belastete Schrauben mit geringstem Energieverlust bei endlicher Flügelzahl, Ansätze von Lock für die Wechselwirkung zwischen Schraube und Rumpf sowie Näherungstheorien für die Luftschraube im Windkanal nach McKinnon Wood und Harris, für das Windmühlenflugzeug von Glauert und für den Einfluß der Kompressibilität von Taylor.

H. B. Helmbold (Göttingen).

**Treer, M. F.: Die Bedingungen der hydraulischen Ähnlichkeit.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 77—84 (1931).

Zwei verschiedene Strömungen sind bekanntlich hydraulisch vollkommen ähnlich, wenn sie übereinstimmen in Reynoldsscher Zahl, Froudescher Zahl, Zeitzahl, Schallgeschwindigkeit und Kavitationsgrenze. Im allgemeinen ist es unmöglich, alle 5 Bedingungen gleichzeitig zu erfüllen. Der Verf. zeigt, daß für Flüssigkeitsströmungen mit beschränkter Ähnlichkeit doch eine Umrechnungsmöglichkeit besteht, wenn man geeignete Parameter findet.

H. Schlichting (Göttingen).

**Kármán, Th. v.: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 85—93 (1931).

Der Verf. gibt einen Bericht über seine bekannte Arbeit, die unter dem gleichen Titel 1930 in den Nachr. d. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen erschien. Es wird die grundlegende Annahme gemacht, daß sich der turbulente Austauschmechanismus durch ein Differentialgesetz darstellen läßt, daß also die turbulenten Zusatzspannungen in einem Punkt des Strömungsfeldes allein durch die Größen der mittleren Strömung an der betreffenden Stelle bestimmt sind. Das Bewegungsbild der turbulenten Schwankungsbewegungen soll in erster Näherung in allen Punkten des Strömungsfeldes „ähnlich“ sein, d. h. sich nur in einem Längen- und Zeitmaßstab unterscheiden. Unter dieser Annahme erhält der Verf. aus den Bewegungsgleichungen der reibungslosen Flüssigkeit, daß der Längenmaßstab der turbulenten Schwankungsbewegung durch die Größe  $l = U/U''$  gegeben ist, und die Schwankungsgeschwindigkeiten proportional  $lU'$  sind. [ $U(y)$  = zweidimensionale mittlere Strömung]. Das letztere Ergebnis ist eine Bestätigung des Prandtlschen Mischungswegansatzes. Für die turbulente Schubspannung  $\tau$  ergibt sich damit  $\frac{\tau}{\rho} = k^2 \frac{U'^4}{U'^2}$  ( $k$  = universelle Konstante,  $\rho$  = Dichte).

Mit diesem Reibungsglied wird die Geschwindigkeitsverteilung für die ebene Strömung in einem Kanal berechnet und in guter Übereinstimmung mit den Experimenten gefunden. Bedeutet  $\psi = \frac{2\tau_0}{\rho U_{\max}^2}$  die Reibungsziffer ( $\tau_0$  = Schubspannung an der Wand) und  $R$  die Reynoldssche Zahl, so tritt an die Stelle der bisherigen Interpolationsformel für das Widerstandsgesetz  $\psi = \frac{\text{const}}{R^m}$ , wo der Exponent  $m$  noch von  $R$  abhängig ist, jetzt die endgültige Formel  $1/\sqrt{\psi} = a + b \log(R\sqrt{\psi})$  ( $a$  und  $b$  Konstanten), von der zu erwarten ist, daß sie bis zu beliebig hohen Reynoldsschen Zahlen gültig ist.

H. Schlichting (Göttingen).

**Tollmien, W.: Beitrag zur Theorie der Turbulenz.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 105—108 (1931).

Im 1. Teil gibt der Verf. einen kurzen Bericht über die Resultate seiner Arbeit „Über die Entstehung der Turbulenz“, Göttinger Nachr. 1929, 21. Es handelt sich um das Problem der Stabilität der Laminarströmung gegenüber kleinen Störungen.  $U(y)$  sei eine zweidimensionale Laminarströmung in der  $x$ -Richtung. Dieser Strömung wird eine zweidimensionale Störungsbewegung überlagert, deren Stromfunktion man sich in eine Fourierreihe entwickelt denkt, so daß  $\varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)} = \varphi(y)e^{i\alpha(x - ct)}$  eine



Partialschwingung ist.  $\lambda = 2\pi/\alpha$  ist die Wellenlänge der Störung. Der Realteil von  $c = \beta/\alpha$  ist die Phasengeschwindigkeit, und der Imaginärteil von  $c$  gibt die Anfachung oder Dämpfung der Störung. Als Störungsgleichung erhält man

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha R}(\varphi''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi),$$

wobei die Reynoldssche Zahl  $R$  auf irgendeine bestimmte Breite des Laminarprofils bezogen ist. Für sehr große Reynoldssche Zahlen beschränkt sich der Einfluß der Reibung auf die Störungen auf eine sehr schmale Schicht an den begrenzenden Wänden. Im Innern ist diese Wirkung so gering, daß schon die Diskussion der reibungslosen Störungsgleichung  $\varphi'' - \alpha^2 \varphi - \frac{U''}{U - c} \varphi = 0$  Auskunft darüber geben kann, welche

Wellenlängen  $\alpha$  der Störung für die Laminarströmung gefährlich werden können. Hierbei tritt jedoch noch eine Schwierigkeit auf. Für Laminarprofile mit  $U'' < 0$  gibt es, wie sich leicht zeigen läßt, im Innern der Flüssigkeit eine Schicht, wo  $U = c$ , d. h. ein Flüssigkeitsteilchen dieser kritischen Schicht schwingt immer in derselben Störungsphase. An der kritischen Stelle  $U = c$  hat die Lösung der reibungslosen Gleichung im allgemeinen eine Singularität. Um das Randwertproblem weiter diskutieren zu können, muß man also an dieser Stelle noch die Reibung berücksichtigen. Diese ergibt an der kritischen Stelle  $U = c$  einen Phasensprung in  $\varphi'$ , der auch beim Grenzübergang zur Reibung Null nicht verschwindet. Durch weitere Diskussion des Randwertproblems kommt der Verf. zu einer kritischen Reynoldsschen Zahl. Im 2. Teil werden einige Stabilitätsüberlegungen für Laminarprofile mit Wendepunkt angegeben, die zu dem Resultat führen, daß bei diesen Profilen Anfachungen ganz anderer Größenordnung möglich sind als bei den überall konkaven Profilen. *H. Schlichting* (Göttingen).

**Ertel, Hans: Über Turbulenzzirkulation in Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten.** Gerlands Beitr. Geophys. **29**, 339—343 (1931).

Der Verf. untersucht für eine inkompressible turbulente Strömung, die man sich durch Überlagerung einer stationären Laminarströmung ( $v$ ) und einer nichtstationären Zusatzströmung ( $v'$ ) erzeugt denkt, die substantielle Änderung der Turbulenzzirkulation  $\frac{d}{dt} \oint v'_s ds$ . Durch vektoranalytische Rechnung wird gezeigt, daß sich die Änderung der Turbulenzzirkulation durch 2 Glieder ausdrücken läßt, von denen das 1. von der jeweils vorhandenen turbulenten Zusatzgeschwindigkeit nicht abhängt, sondern nur von der mittleren Scheinreibung. Unter gewissen Voraussetzungen lassen sich geschlossene Kurven angeben, für welche das 2. Glied verschwindet, für welche also die Turbulenzzirkulation allein durch die mittlere Scheinreibung bestimmt wird und unabhängig von den momentanen Turbulenzkomponenten ist. *H. Schlichting* (Göttingen).

**Pérès, Joseph: Formules concernant le problème général de la résistance.** (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 132 bis 136 (1931).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit [C. R. **189**, 1246 (1929)], die das analoge zweidimensionale Problem zum Gegenstand hatte, betrachtet Verf. die dreidimensionale Strömung um einen ruhenden, von einer beschränkten geschlossenen Fläche  $S_0$  berandeten festen Körper, deren Geschwindigkeitskomponenten an jeder Stelle des durchströmten Raumbereichs periodische Funktionen der Zeit mit der Periode  $T$  sind. Hinsichtlich der Natur der Flüssigkeit wird dabei lediglich die Voraussetzung getroffen, daß auf einer den Körper einschließenden, im übrigen willkürlich wählbaren geschlossenen Fläche  $S$  und in deren Umgebung die Grundgleichungen der Hydrodynamik idealer inkompressibler Flüssigkeiten gültig sind; in der Umgebung der Körperberandung  $S_0$  dürfen demnach Zähigkeits- und Kompressibilitätswirkungen vorhanden sein. Berechnet werden die über die Periode  $T$  erstreckten Mittelwerte der auf den Körper ausgeübten Kraft- und Momentkomponenten; die hierfür gewonnenen Ausdrücke enthalten einerseits Glieder, die lediglich von den auf  $S$  herrschenden Geschwindigkeiten

abhängig sind, andererseits solche, in denen die Wirbelkomponenten auf  $S$  vorkommen. Für die letztgenannten Glieder werden verschiedene Interpretationen gegeben.

*Harry Schmidt* (Köthen).

**Havelock, T. H.:** The wave resistance of a spheroid. *Proc. roy. Soc. Lond. A* **131**, 275—285 (1931).

Let a spheroid of semi-axes  $a$ ,  $b$ , move with velocity  $u$  in the direction of the axis  $a$  which is supposed to be horizontal and at depth  $h$  below the surface of the water. The drag  $D$  is then given by the formula

$$D = 16\pi\rho\kappa^4 \int_0^{\pi/2} (P^2 + Q^2) \sec^5 \theta d\theta$$

where  $\rho$  is the density of water,  $g$  the acceleration of gravity and  $\kappa g = u^2$ . Also

$$P + iQ = \int_0^\infty d\zeta \int_{-\infty}^\infty d\eta M(\eta, \zeta) e^{-\kappa\zeta \sec^3 \theta + i\kappa\theta \Theta(\theta)}$$

where the function  $\Theta(\theta)$  is equal to  $\sec \theta$  when the axis  $\eta$  is parallel to  $u$  but is equal to  $\sin \theta \sec^2 \theta$  when the axis  $\eta$  is perpendicular to  $u$ . The function  $M(\eta, \zeta)$  specifies the image distribution of doublets, the axis  $\zeta$  being vertical and the axis  $\eta$  in the surface of the water. Numerical results for several cases are obtained with the aid of Bessel functions. The drag curve for the sphere shows a maximum just before the velocity  $u_0$  equal to  $(gh)^{1/2}$ . The curves for the prolate spheroid in end-on motion show that when  $u \ll u_0$ , the drag divided by  $\pi g \rho b^3$  is decreased by increase of the ratio  $a/b$  while for  $u > u_0$  it is increased. For broadside motion the curves for the prolate spheroid are above those for the sphere for all speeds. At a given speed the drag per unit volume of displacement is roughly proportional to the area of the midship section.

*H. Bateman.*

**Riabouchinsky, D.:** Sur quelques problèmes généraux relatifs au mouvement et à la résistance des fluides. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) *Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech.* **1**, 137—147 (1931).

An einige einleitende Betrachtungen über das Verhältnis der geometrischen Intuition zur reinen Analysis wird eine Reihe von Bemerkungen über verschiedene Fragen hydrodynamischer Natur geknüpft, wobei zumeist auf frühere Veröffentlichungen des Verf. Bezug genommen wird.

*Harry Schmidt* (Köthen).

**Szymanski, P.:** Sur l'écoulement non permanent du fluide visqueux dans le tuyau. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) *Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech.* **1**, 249—254 (1931).

Unter der Annahme, daß die Geschwindigkeit der zähen Strömung in einem Rohr dauernd der Achse parallel gerichtet ist, werden die Navier-Stokesschen Gleichungen für diesen Fall, bei nicht stationärer Bewegung aus der Ruhe heraus, integriert. Die in Form einer Reihe gegebene Lösung bei Kreisquerschnitt geht für unendlich lange Zeitdauer der behandelten Strömung in die Poiseuillesche Lösung über. Bei beliebigem Querschnitt gelingt die Lösung mit Hilfe einer der Greenschen analogen Funktion. Die Beweise sind nur angedeutet und einer späteren Veröffentlichung vorbehalten.

*K. Hohenemser* (Göttingen).

**Henry, P. S. H.:** The tube effect in sound-velocity measurements. (*Labor. of Phys. Chem., Univ., Cambridge.*) *Proc. phys. Soc. Lond.* **43**, 340—362 (1931).

Die Kirchhoffsche Formel für die Schallgeschwindigkeit in Rohren wird durch allgemeinere Annahmen zu verbessern versucht. Der Einfluß eines Schlupfes und eines Temperatursprungs an der Wand, einer Radialbewegung des Gases (auch bei elliptischem Rohrquerschnitt) und endlicher Leitfähigkeit der Wandung wird durchgerechnet und als vernachlässigbar klein erkannt, ebenso der weiterhin untersuchte Einfluß der Rohrenden und des Spalts zwischen Kolben und Wand. Nach Meinung des Verf. sind daher die beobachteten Abweichungen von der Kirchhoffschen Formel nur auf eine turbulente Bewegung des Gases zurückzuführen.

*S. Gradstein* (Darmstadt).



**Taylor, G. D.:** *The flow round a body moving in a compressible fluid.* (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 263—275 (1931).

[Deutsche Übersetzung erschienen Z. ang. Math. u. Mech. **10**, 334—345 (1930).] Während die Hydrodynamik bei inkompressiblen Flüssigkeiten und bei geringen Geschwindigkeiten in kompressiblen Flüssigkeiten (Gasen) sehr gute Beschreibungen der Strömungsvorgänge um einen Körper liefert, wenn man die Flüssigkeit als reibungslos und drehungsfrei voraussetzt, so überschreitet man bei einer Anströmgeschwindigkeit von etwa der Hälfte der Schallgeschwindigkeit eine Grenze, bei der Veränderungen der Strömung auftreten, die man von der reibungslosen und drehungsfreien Strömung nicht erwarten wird. Das Problem des Taylorschen Vortrages ist die Prüfung der Frage, ob es eine Geschwindigkeit gibt, mit der eine drehungsfreie Umströmung eines Körpers unmöglich wird. Sicher hängt eine derartige Grenze damit zusammen, daß bei höheren Anströmgeschwindigkeiten Gebiete an den Seiten des Körpers auftreten, in denen die Schallgeschwindigkeit überschritten ist. Wegen der großen rechnerischen Schwierigkeiten in der exakten Behandlung derartiger Strömungen werden lösbarer Einzelprobleme aufgezeigt. 1. Die elektrische Methode zur Auffindung von Strom- und Potentiallinien ebener inkompressibler Strömungen wird durch Veränderung der Tiefe des Elektrolyten für die kompressible Strömung in einem Verfahren zur schrittweisen Näherung verwandt. Diese Methode scheint sofort zu divergieren, wenn Gebiete mit Überschallgeschwindigkeit auftreten. 2. Die rechnerische Behandlung der ebenen Wirbel-Senke zeigt, daß sehr wohl ein kontinuierlicher Übergang von Unterschallbereichen zu Überschallbereichen in einer Strömung möglich ist. 3. Der engste Querschnitt zwischen zwei Kreiszyklindern kann nur dann eine Symmetrieebene für die Drücke bei der Durchströmung dieser Verengung darstellen, wenn die größte Geschwindigkeit am Rande dieses Querschnittes höchstens wenige Prozente über der Schallgeschwindigkeit liegt. 4. Bei der Zirkulation um einen Kreiszyklinder ist wie bei der Wirbelsenke ein kontinuierlicher Geschwindigkeitsverlauf durch die Schallgeschwindigkeit hindurch zu den Überschallgeschwindigkeiten in der Nähe des Körpers möglich. Versieht man den Zylinder dagegen mit kleinen Wellungen, so klingen die Störungen nur dann nach außen ab, wenn die Geschwindigkeit am Zylinder unter einer Grenze bleibt, die von der Wellenzahl auf dem Zylinderumfang abhängt. Für beliebig kleine Wellenlängen ergibt sich die Schallgeschwindigkeit als Grenze, für größere Wellenlängen ergeben sich größere Grenzgeschwindigkeiten. Hat die Strömung gerade die Grenzgeschwindigkeit für eine bestimmte Wellenlänge am Rande des Körpers, so kann diese Wellenlänge mit endlicher Amplitude in der Strömung vorhanden sein, auch ohne daß die Wand eine endliche Amplitude dieser Welle hätte. Es erscheint demnach möglich, die Veränderungen in der Strömung bei stellenweiser Überschreitung der Schallgeschwindigkeit auf den Mangel an Stabilität gegenüber Störungen mit kleinen Wellenlängen zurückführen zu können. *Busemann.*

**Kampé de Fériet, J.:** *Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible.* (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 334—338 (1931).

Es werden einige Fälle diskutiert, in denen es gelingt, die ursprünglichen nicht linearisierten Bewegungsgleichungen der zähen Flüssigkeitsströmung exakt zu integrieren. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die nicht linearen Glieder in der Wirbelgleichung verschwinden, ergibt sich die Konstanz der Wirbelstärke längs jeder Stromlinie. Diese Bedingung wird vorausgesetzt. Die Wirbelstärke  $\xi$  genügt dann für die ebene inkompressible Strömung der Gleichung  $\partial \xi / \partial t - \nu \Delta \xi = 0$ , wo  $\nu$  die kinematische Zähigkeit ist, d. i. dieselbe Gleichung, welche der Wärmeleitungstheorie zugrunde liegt. Im stationären Fall ist die Wirbelfunktion harmonisch, es ergeben sich dann 3 Typen der Bewegung. Überdies wird ein weiterer Typ der nichtstationären Bewegung angegeben, bei welchem die Geschwindigkeiten mit wachsender Zeit nach Null gehen.

*K. Hohenemser (Göttingen).*

**Odqvist, Folke K. G.:** *Integral equations applied to viscous fluid motion and particularly to the initial disturbance of the two-dimensional poiseuille flow.* (Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.) Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech. **1**, 339—345 (1931).

Im Anschluß an seine Dissertation (Stockholm 1928) führt der Verf. die Randwertaufgabe der linearisierten Differentialgleichungen der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten im ebenen Falle auf ein System simultaner linearer Integralgleichungen zurück, welches der numerischen Behandlung zugänglich ist. Als Beispiel wird behandelt die Ausbildung der Poiseuilleschen Strömung zwischen 2 parallelen Platten aus einer Strömung mit konstanter Geschwindigkeit (Anlaufströmung). *Prager (Göttingen).*

**Richardson, E. G.:** The circulation due to a cylinder rotating in a viscous fluid. *Philosophic. Mag.*, VII. s. 11, 1215—1220 (1931).

In der Umgebung eines rotierenden Zylinders ist nach der Theorie der reibungslosen Flüssigkeiten die Tangentialgeschwindigkeit  $u$  proportional  $r^{-1}$  ( $r$  = Abstand von der Zylinderachse). Für zähe Flüssigkeiten gilt  $u \sim r^{-n}$ , wobei  $n > 1$  ist, noch von  $r$  abhängt und eine Funktion der Reynoldsschen Zahl  $u \cdot r/\nu$  ist. ( $\nu$  = kinematische Zähigkeit.) Der Verf. ermittelt experimentell die Abhängigkeit des Exponenten  $n$  vom Radius und der Reynoldsschen Zahl. Durch eine Energiebetrachtung wird versucht, für diese Strömung eine kritische Reynoldssche Zahl zu erhalten. *H. Schlichting* (Göttingen).

**Pavel, D.:** Beitrag zur Bestimmung von Strömungsbildern durch Kreiselräder. (*Stockholm, Sitzg. v. 24.—29. VIII. 1930.*) *Verh. 3. internat. Kongr. techn. Mech.* 1, 346—350 (1931).

Durch graphische Auswertung elementarer konformer Abbildungen gewinnt der Verf. eine Anzahl Stromlinienbilder von Potentialstörungen in radialen und parallelen Schaufelgittern. *E. Weinel* (Göttingen).

## Relativitätstheorie.

**Einstein, A., und W. Mayer:** Systematische Untersuchung über kompatible Feldgleichungen, welche in einem Riemannschen Raume mit Fernparallelismus gesetzt werden können. *Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. H.* 13/15, 257—265 (1931).

Die Kompatibilität der Feldgleichungen ist an die Bedingung gebunden, daß zwischen den Gleichungen Identitäten bestehen müssen. Die früheren Untersuchungen gingen darauf hinaus, Gleichungssysteme aufzufinden, die zwei Viereridentitäten genügen. Für die Kompatibilität genügt es aber, nur eine Viereridentität zu fordern. In der vorliegenden Untersuchung werden systematisch alle Gleichungssysteme aufgesucht, die einer Viereridentität genügen, also kompatibel sind. Und zwar soll die Identität linear sein in den Feldgleichungsausdrücken, und nur einmalige Differentiation enthalten. Das Gleichungssystem selbst soll in den zweiten Ableitungen der Feldvariablen  $h_{\alpha\nu}$  linear, in den ersten Ableitungen quadratisch sein. Das Aufsuchen der Identitäten erfolgt nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Es ergeben sich 20 algebraische Gleichungen für 10 Koeffizienten, die auflösbar sind. Die Resultate werden in einer Tabelle zusammengestellt und der Typus der dazugehörigen Feldgleichungen diskutiert. Es ergeben sich im ganzen 4 verschiedene Typen von kompatiblen Feldgleichungen. Der erste Typus hat die Eigenschaft, aus einem Hamiltonschen Prinzip ableitbar zu sein, mit der Invarianten  $J = J_1 + \alpha J_2 + \beta J_3$ , wo  $J_1$  die skalare Riemannsche Krümmung bedeutet,

$$J_2 = \Phi_\alpha \Phi^\alpha,$$

$$J_3 = S_{\mu\nu}^\alpha S_{\mu\nu}^\alpha \left( S_{\mu\nu}^\alpha = A_{\mu\nu}^\alpha + A_{\alpha\mu}^\mu + A_{\alpha\mu}^\nu \right)$$

ist. (Unterstreichungen bedeutet Umstellung der Indexstellung.) Der zweite Typus war bisher nicht bekannt. Diese beiden Typen gehen bei bestimmter Wahl der in ihnen auftretenden Koeffizienten in die früheren Gravitationsgleichungen über, bedeuten also eine Verallgemeinerung, nicht eine gänzliche Änderung derselben. Durch Trennung von symmetrischem und antisymmetrischem Teil und unter Benutzung der kovarianten Ableitungen der Riemannschen Geometrie — bezeichnet durch  $;$  —, kann man die Gleichungen in folgender Form schreiben:

$$0 = 2S^{\mu\alpha} = 2P^{\mu\alpha} + \sigma[\Phi_{\alpha;\mu} + \Phi_{\mu;\alpha} - 2g^{\mu\alpha}\Phi_{\nu;\nu} - \sigma(\Phi_\alpha\Phi_\mu + \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\Phi_\nu\Phi_\nu)] \quad (11')$$

$$0 = 2A^{\mu\alpha} = \tau \frac{1}{h} (h S_{\alpha\mu}^\nu)_{,\nu} - \sigma(\Phi_{\alpha,\mu} - \Phi_{\mu,\alpha}), \quad (11a')$$

während die Identität lautet:

$$0 \equiv S^{\mu\alpha}{}_{;\mu} + \sigma \left( S^{\alpha\sigma}\Phi_\sigma - \frac{1}{2}S^{\sigma\sigma}\Phi_\alpha \right) + \frac{1}{h} (h A^{\mu\alpha})_{,\mu} \quad (12')$$



Es ist hierbei  $P_{\mu\alpha} = R_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\alpha}R$  gesetzt. Der dritte Typus wurde früher schon aus der Vertauschungsregel der Differentiation abgeleitet. Er läßt sich in folgender übersichtlichen Form schreiben. Es sei:

$$L_{\mu\nu}^{\alpha} = A_{\mu\nu}^{\alpha} + \alpha(\Phi_{\mu}\delta_{\nu}^{\alpha} - \Phi_{\nu}\delta_{\mu}^{\alpha}) + \beta S_{\mu\nu}^{\alpha},$$

wo  $\alpha$  und  $\beta$  Zahlenparameter bedeuten. Dann lauten die Feldgleichungen und die zugehörige Identität:

$$\left. \begin{aligned} G^{\mu\alpha} &\equiv L_{\mu\nu}^{\alpha}{}_{;\nu} - \frac{1}{2}L_{\sigma\tau}^{\alpha}A_{\sigma\tau}^{\mu} = 0, \\ G^{\mu\alpha}{}_{;\mu} &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Das Zeichen / bedeutet folgende Operation:

$$T: {}^{\mu}{}_{;\mu} \equiv T: {}^{\mu}{}_{;\mu} - T: {}^{\mu}\Phi_{\mu}.$$

Der vierte Typus möglicher Feldgleichungen ist in seiner Allgemeinheit bisher noch nicht bekannt gewesen und noch nicht näher untersucht. *Lanczos* (Frankfurt a./M.).

**Schrödinger, E.: Spezielle Relativitätstheorie und Quantenmechanik.** Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. H. 12, 238—247 (1931).

Der Verf. beweist, daß die Aufstellung von scharfen relativistischen Bezugssystemen im Gebiet der Quantenmechanik nicht ohne weiteres möglich ist, und daß somit die Grundlagen der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik in gewissem Sinn in Widerspruch zueinander stehen. Haben wir nämlich einen Körper mit der Masse  $m$ , der uns als Uhr dienen soll, so wird dieselbe wegen des unbestimmten Rückstoßes bei der Messung auf eine unbestimmte Weise verlangsamt. Dauert die Messung eine Zeit  $\tau$ , so ist die Frequenzunschärfe von der Größenordnung  $1/\tau$  und die Rückstoßunschärfe  $\Delta p \sim \hbar/c\tau$ . Daraus wird abgeleitet, daß eine Zeitmessung nur dann mit einer großen relativen Genauigkeit durchführbar ist, wenn das Zeitintervall groß gegen  $\hbar/mc^2$  ist. Auf analoge Weise läßt sich beweisen, daß ein Maßstab mit der Masse  $m$  nur Abstände messen kann, die groß gegen  $\hbar/mc$  sind. Der Verf. spricht die Vermutung aus, daß es eine wesentliche Rolle spielt, daß wir in der Natur nicht beliebige Elementarmassen zur Verfügung haben, was nach seiner Meinung zu einer Unschärfe des Raum- und Zeitbegriffes führt. Ferner betont der Verf., daß schon die allgemeine Fragestellung der Quantenmechanik an sich unrelativistischer Natur ist, da in ihr alle Unschärfe sich auf eine in einem beliebig scharf definierten Zeitmoment ausgeführte Messung bezieht. Diese Eigenschaft versucht der Verf. als inneren Widerspruch aufzufassen, indem er die zur genauen Zeitbestimmung notwendige unendliche Energieunschärfe der Uhr als physikalisch sinnlos ansieht. *L. Landau* (Leningrad).

**Alexandrow, W.: Über die Struktur der Feldgleichungen der Materiewellen.** Z. Physik 68, 696—703 (1931).

Die Kovarianz der Diracschen Gleichungen der Wellenmechanik hat keinen tensoranalytischen Charakter. Sie werden ersetzt durch ein Gleichungssystem, das allgemein kovariant ist im Sinne der gewöhnlichen Tensoranalysis. Dabei tritt außer dem normalen elektromagnetischen Feld noch ein zweites Feld auf, das einen „dualen“ Charakter hat, bei dem also die Rolle des Vektorpotentials durch einen schiefsymmetrischen Tensor 3. Ranges übernommen wird. Die Wellengleichungen der Materie entstehen durch Vereinigung beider Felder. Als Zusatzglieder zu den gewöhnlichen elektromagnetischen Feldgleichungen erscheinen dabei einerseits ein Skalar, andererseits (als duales Gebilde) ein schiefsymmetrischer Tensor 4. Ranges. *Lanczos* (Frankfurt a./M.).

**Alexandrow, W.: Über die allgemein koordinateninvarianten Gleichungen der Wellenmechanik. (Materie und Gravitation.)** Z. Physik 68, 813—823 (1931).

Nachdem die Gleichungen der Materiewellen in eine tensorielle Lorentz-invariante Form gebracht sind (siehe vorstehendes Referat), kann man sie unmittelbar auch allgemein kovariant machen unter Einführung krummliniger Koordinaten und des Einsteinschen Linienelementes. Auf diese Weise können auch die Gravitationswirkungen mit einbezogen werden. Es wird gezeigt, daß das Verhalten der Materiewellen im

Gravitationsfeld richtig herauskommt, insbesondere die Hyperbelbewegung im schwachen Felde in hinreichender Entfernung vom Zentrum, entsprechend dem Newtonschen Gesetz. Zum Schluß wird das Weylsche Prinzip der „Eichinvarianz“ untersucht; es erweist sich bei Vorhandensein eines elektromagnetischen Feldes für die Materiewellen als nicht gültig.

Lanczos (Frankfurt a./M.).

**Zaycoff, Rascheo:** Bemerkungen und Zusätze zu meiner Arbeit: „Über die Einsteinsche Theorie des Fernparallelismus.“ Z. Physik **69**, 428—430 (1931).

Bemerkungen über vier früher aus den Einsteinschen Gleichungen hergeleitete Identitäten, über ein anderes Gleichungssystem, das an Stelle der Feldgleichungen verwendet werden kann, und über die Wellenmechanik im Bereich der einheitlichen Feldtheorie. (Vgl. dies. Zbl. **1**, 34.)

G. Beck (Leipzig).

**Thomas, Tracy Yerkes:** On the unified field theory. V. (*Dep. of Math., Univ., Princeton.*) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. **17**, 199—210 (1931).

In Fortsetzung seiner Untersuchung beschäftigt sich Verf. in dieser Note mit dem besonderen Verhalten der charakteristischen Flächen gegenüber dem Existenztheorem. Man kann zeigen, daß es eine unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen der Feldgleichungen gibt, die auf einer charakteristischen Fläche alle dieselben Werte für die  $h_{\alpha}^i$  und deren 1. Ableitungen annehmen. Aus der Art dieser Integrale ist zu sehen, daß man andererseits auf die Eindeutigkeit der Lösung schließen kann, wenn keine charakteristische Fläche vorliegt. Diese Eigentümlichkeit der charakteristischen Flächen führt dazu, dieselben als Wellenflächen der Gravitation und der elektromagnetischen Wirkungen zu interpretieren. (IV. vgl. dies. Zbl. **1**, 243.)

Lanczos (Frankfurt a./M.).

**Thomas, Tracy Yerkes:** On the unified field theory. VI. (*Dep. of Math., Univ., Princeton.*) Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. **17**, 325—329 (1931).

In einem endlichen Gebiet  $R$  des vierdimensionalen Kontinuums sollen die  $h_1^i = \delta_1^i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sein. Wird  $x_1$  als  $t$  gedeutet, so erfolgt die Ausbreitung einer Störung dann nach dem Gesetz  $t = \varphi(x_2, x_3, x_4)$ . Setzen wir dann noch

$$ds^2 = dt^2 - \sum_2^4 \sum_2^4 \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

dann folgt, daß  $\varphi$  auf den Flächen  $\varphi = t$  der Gleichung  $\sum_3^4 \sum_3^4 \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} = 1$

genügt. Daraus folgt dann, daß die Wellenfronten eine Familie von parallelen Flächen darstellen, die sich mit der Geschwindigkeit 1 fortpflanzen. Gehen von allen Punkten eines Raumteiles derartige Wellen aus, so stellt die Einhüllende der von den einzelnen Punkten ausgehenden Elementarwellen die Gesamtwellen dar: es gilt daher das Huygenssche Prinzip für die Wellenfronten. Die Orthogonaltrajektorien der Flächen  $\varphi = \text{const}$  sind die Bicharakteristiken der Feldgleichungen (geodätische Nulllinien) und andererseits stellen sie die Lichtstrahlen dar. Damit ist die Grundlage für die Optik der einheitlichen Feldtheorie gegeben. Zum Schluß wird gezeigt, daß die Angabe der absoluten elektromagnetischen Feldstärken in einem Gebiet für die Zeit  $t = 0$  die Struktur des Raum—Zeitkontinuums in der Nachbarschaft bestimmt.

Friedrich Zerner (Wien).

**Racine, Ch.:** Contribution à l'étude du problème statique dans la théorie de la relativité. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1533—1536 (1931).

Die metrische Fundamentalform des Einsteinschen statischen Schwerfeldes läßt sich bekanntlich auf die Gestalt bringen

$$ds^2 = V^2 dt^2 - d\sigma^2, \quad (1)$$

worin sowohl  $V^2$ , das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit, wie auch die Koeffizienten der ternären quadratischen Differentialform  $d\sigma^2$ , welche die Metrik „des Raumes“ ( $E$ ) im raumzeitlichen Kontinuum beherrscht, zeitunabhängige Funktionen der Raumkoordinaten allein sind. Auf Grund dieser Metrik ist es möglich, das statische Gravitationsfeld auf den dreidimensionalen Punktraum zurückzuführen. Insbesondere



reduzieren sich im materiefreien Gebiet die Feldgleichungen der Gravitation auf das System:

$$R_{ij} + \frac{V_{ij}}{V} = 0, \quad (2)$$

$$\Delta V = 0, \quad (3)$$

wenn man unter  $R_{ij}$  den verjüngten Riemannschen Tensor des Raumes ( $E$ ) und unter  $V_i, V_{ij}, \Delta$  die kovarianten Ableitungen der Funktion  $V$  sowie den zweiten Beltrami-schen Differentialparameter relativ zur Metrik  $d\sigma^2$  versteht. Die Quadratwurzel aus dem zeitartigen Koeffizienten der raumzeitlichen Metrik ist demnach eine harmonische Funktion. Aus diesem Sachverhalt gewinnt Verf. folgende Theoreme: I. Der Vektorfluß durch jede geschlossene Fläche im Innern eines Gebietes ( $D$ ) von ( $E$ ) verschwindet für das Feld  $V_i$ . II. Ein raumzeitliches Kontinuum vom metrischen Fundamentaltensor (1), überall regulär (einschließlich der Elemente erster Ordnung) und im äußeren Feld den Gravitationsgleichungen (2) und (3) unterworfen, ist notwendig überall euklidisch, wenn sein Raum ( $E$ ) von einfachem Zusammenhang und unbegrenzt, die Funktion  $V$  beschränkt vorausgesetzt wird. III. Die Existenz von Materie ist im statischen Fall wesentlich mit Singularitäten des äußeren Feldes verknüpft. Die Beweisführung benutzt eine Verallgemeinerung der Greenschen Formeln der Potentialtheorie auf nichteuklidische Verhältnisse. Von dem in den Greenschen Formeln auftretenden Funktionenpaar  $U$  und  $V$  genügt  $V$  im äußeren Feld der Laplaceschen, im inneren der Poissonschen Bedingung; für die Funktion  $U$  empfiehlt sich die Wahl  $U = 1$  (Theorem I und III) bzw.  $U = 1/\varrho + W$  (Theorem II), wo  $\varrho$  die geodätische Entfernung zweier Punkte im Gebiet ( $D$ ) bedeutet und für  $W$  die Beschränkung  $|W| < \varrho K$  gilt. Im übrigen werden alle Voraussetzungen gemacht, welche die Anwendung der Greenschen Formeln erheischen. M. Pinl (Berlin).

**Chou, P. Y.:** The gravitational field of a body with rotational symmetry in Einstein's theory of gravitation. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) Amer. J. Math. **53**, 289—308 (1931).

Die allgemeine Lösung der Einsteinschen Gravitationsgleichungen für den Fall eines ruhenden Körpers mit rotationssymmetrischer Massenverteilung läßt sich reduzieren auf die Lösung der Potentialgleichung und die Lösung einer nicht-linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung. Außer den üblichen Grenzfällen (Kugel, unendliche Ebene) wird ausführlich die strenge Lösung behandelt, die durch ein Rotationsellipsoid erzeugt wird. Das Linienelement wird aufgestellt. Daran anschließend werden auch die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes in einem solchen Feld integriert. Die Exzentrizität des Ellipsoids bewirkt, daß zu der normalen Periheldrehung des Schwarzschildschen Linienelements noch eine zusätzliche Drehung hinzukommt. Lanczos (Frankfurt a./M.).

**Horák, Z.:** Sur la ligne d'univers d'un point matériel en mécanique classique. C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1203—1205 (1931).

Die drei Raumkoordinaten  $x, y, z$  eines Massenpunktes werden mit der „Eigenzeit“  $u$  zu einer vierdimensionalen euklidischen Mannigfaltigkeit mit der Metrik  $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2$  zusammengefaßt. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen des freien Massenpunktes lassen sich dadurch in die Form bringen

$$2\varepsilon \frac{d^2x}{d\sigma^2} = X, \quad 2\varepsilon \frac{d^2y}{d\sigma^2} = Y, \quad 2\varepsilon \frac{d^2z}{d\sigma^2} = Z, \quad 2\varepsilon \frac{d^2u}{d\sigma^2} = U.$$

Die Eigenzeit  $u$  wird aus der Gleichung  $d^2u/dt^2 = U$  und der Bedingung

$$Xdx + Ydy + Zdz + Udu = 0$$

bestimmt,  $\varepsilon$  ist die „Energie“ der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit. Damit  $u$  reell wird, muß  $\varepsilon$  größer als die kinetische Energie  $T(x, y, z)$  sein. (Diese Ungleichung ist nicht immer für endliche Werte von  $\varepsilon$  erfüllbar. Ref.) „Eigenzeit“  $u$  und „absolute Zeit“  $t$  fallen bei der kräftefreien Bewegung zusammen. Eine sinngemäße Deutung

in der vierdimensionalen Welt gestattet das d'Alembertsche Prinzip für den Fall, daß eine Nebenbedingung der Form  $\Phi(x, y, z, t) = 0$  zu erfüllen ist. *A. Klose.*

**Le Roux, J.: Expression invariante de la loi de gravitation.** C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1439—1442 (1931).

Die Untersuchung ist eine Ergänzung der „Principes mathématiques de la Théorie de la Gravitation“ des Verf. Das Prinzip der kleinsten Wirkung  $\delta \int \sqrt{2U} \Sigma m ds^2 = 0$  wird durch nachfolgende Veränderungen gegen Transformationen, die dem Übergang zu bewegten Koordinatensystemen entsprechen, invariant gemacht: 1.  $U$  soll nur von den gegenseitigen Entfernungen der Massen abhängig sein. Es ergibt sich  $U = f \Sigma \frac{m_i m_k}{r_{ik}} + h$  ( $f$  und  $h$  Konstante). 2.  $\frac{1}{2} \Sigma m \frac{ds^2}{dt^2}$  ist die kinetische Energie  $T$ .  $T_0$  ist ihr Minimum innerhalb der betrachteten Transformationsgruppe. Dann wird  $2T_0 = d\sigma^2$  gesetzt. Nunmehr wird das Wirkungsprinzip definiert durch:  $\delta \int \sqrt{2U} d\sigma = 0$ , was natürlich jetzt invariant ist. Setzt man  $dt = d\sigma / \sqrt{2U}$ , so spielt  $t$  in der neuen Theorie dieselbe Rolle wie in der klassischen. Es gelten die Lagrangeschen Gleichungen:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial x'} - \frac{\partial T_0}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}$ . Von den  $3n$  Gleichungen für  $n$  freie Punkte sind aber wegen der Invarianz nur  $3n - 6$  unabhängig. Es empfiehlt sich, sie durch die Gleichungen  $\Sigma m x' = 0$  und  $\Sigma m (zy' - z'y) = 0$  zu ergänzen, weil in dem so bestimmten Koordinatensystem die alte und die neue Form des Wirkungsprinzips äquivalent sind. Die Perihelbewegung des Merkurs ergibt sich zu 93/100 des beobachteten Wertes.

*Friedrich Zerner (Wien).*

**Le Roux, J.: De l'impossibilité d'une loi de gravitation pour un ensemble ne comprenant que deux points matériels.** C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1309—1311 (1931).

Zwei isolierte Massenpunkte definieren als einzige vom Bezugssystem unabhängige Größe ihren gegenseitigen Abstand. Bei Abwesenheit weiterer Massen, die zur Festlegung des Bezugssystems dienen könnten, ist es daher nicht möglich, zu einem eindeutigen Gravitationsgesetz zu kommen. Es lassen sich z. B. alle Bewegungen, bei denen der Abstand zwischen zwei endlichen Grenzwerten oszilliert (also etwa das Newtonsche und das Einsteinsche Gravitationsgesetz und die elastische Anziehung) durch eine geeignete Transformation der Zeit und der Winkel, die die Orientierung im Raum festlegen, aufeinander abbilden, sodaß man nicht zwischen ihnen unterscheiden kann, solange sich das Bezugssystem nicht anderweitig festlegen läßt. *Nordheim.*

**Straneo, Paolo: Théorie unitaire de la gravitation et de l'électricité.** C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1364—1367 (1931).

Formales (und an die Eddingtonsche affine Theorie erinnerndes) zum Programm einer einheitlichen, Gravitation und Elektrizität umfassenden Feldtheorie.

*Guth (Leipzig).*

**Straneo, Paolo: Intorno alla „teoria unitaria“ della gravitazione e dell'elettricità. I. Base fisico-geometrica per una conseguente deduzione delle equazioni di campo.** Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. **13**, 364—370 (1931).

Ausführungen zu einer Art von affinen einheitlichen Feldtheorie. (Vgl. vorsteh. Ref.)

*Guth (Leipzig).*

**Iwatsuki, Toranosuke: An example of the biquarification problem of gravity and electricity.** J. Sci. Hiroshima Univ. A **1**, 107—109 (1931).

Formales zur Aufstellung einer einheitlichen, sowohl die Gravitation als auch die Elektrizität umfassenden Feldtheorie.

*Guth (Leipzig).*

**Mimura, Yositaka, and Toranosuke Iwatsuki: On the linearity of the Lorentz transformation.** J. Sci. Hiroshima Univ. A **1**, 111—116 (1931).

Versuch eines mit gruppentheoretischen Hilfsmitteln durchgeführten Beweises der Linearität der Lorentz-Transformation „by confining themselves (sollte wohl heißen: ourselves) only to those physical assumptions which will be readily accepted“.



Die bekannten Ableitungen der Lorentz-Transformation von Einstein u. a. sollten nämlich nach den Autoren teils mit mathematischen, teils mit physikalischen Schwierigkeiten behaftet sein. Ref. vermag dies nicht einzusehen. Die „Frage“ der Linearität der Lorentz-Transformation dürfte übrigens durch die Arbeiten von Ignatowsky und von Frank und Rothe (vgl. *Enz. math. Wiss.* 5, 19 [Pauli], 556) vollständig beantwortet sein.

*Guth* (Leipzig).

**Lalan, V.: L'hypothèse de la courbe de poursuite et la réfraction dans les systèmes optiques en mouvement.** C. r. Acad. Sci. Paris 192, 933—935 (1931).

L'auteur cherche à déduire la loi de réfraction dans les systèmes optiques en mouvement. Il suppose, d'après M. Sémat, que la lumière s'arrête à chaque particule et il admet que le temps d'arrêt  $\theta$  „est employé par le rayonnement à parcourir, avec la vitesse  $c$ , une ligne polygonale fermée, ... partant de la particule et y revenant, avant de gagner la particule suivante“. La théorie n'ayant pas d'intérêt physique ou mathématique, une exposition plus complète nous semble inutile.

*V. Fock* (Leningrad).

**Sémat, A.: L'hypothèse de la courbe de poursuite et l'expérience de Michelson.** C. r. Acad. Sci. Paris 192, 1029—1032 (1931).

L'auteur cherche à expliquer, par l'hypothèse de la courbe de poursuite, le résultat négatif de l'expérience de Michelson. Voir la remarque au résumé qui précède.

*V. Fock* (Leningrad).

## Quantentheorie.

**Born, M.: Quelques problèmes de mécanique quantique.** Ann. Inst. Poincaré 1, 205—263 (1931).

In einer Reihe von Pariser Gastvorträgen spricht M. Born über moderne Probleme der Quantenmechanik, mit denen er oder seine Schüler sich in der letzten Zeit besonders befaßt haben. Im 1. Kapitel werden die Grundlagen der Matrizen- und Wellenmechanik rekapituliert, wobei mit Hilfe der allgemeinen Transformationstheorie die Äquivalenz der beiden Auffassungen gezeigt wird. Zum Schluß wird die statistische Deutung der neuen Mechanik auseinandergesetzt. Im 2. Kapitel werden die Fragen des Kernzerfalls behandelt. In seiner ursprünglichen Fassung führt das Problem zu einem nicht-hermiteschen Operator mit komplexen Eigenwerten. Es wird gezeigt, wie das Problem behandelt werden kann, ohne die übliche quantenmechanische Begriffsbildung zu erweitern. Weiter folgt die Anwendung der Quantenmechanik auf das Problem der chemischen Katalyse und Adsorption. An einem Modell wird gezeigt, daß im Bereiche dieser Prozesse Quanteneffekte eine Rolle spielen können. Das 3. Kapitel ist der Diracschen Lichttheorie gewidmet, insbesondere der Methode von Weisskopf und Wigner. Es ist möglich, durch einen aus physikalischen Überlegungen stammenden Ansatz die Gleichungen der Quantentheorie des Lichtes in solcher Näherung zu integrieren, die auch noch zu der Bestimmung der natürlichen Linienbreite der Spektrallinien führt.

*G. Rumer* (Göttingen).

**Théodoresco, N.: Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles de M. Dirac.** Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 342—346 (1931).

Die Arbeit enthält im wesentlichen eine Übertragung des Gaußschen und Green-schen Integralsatzes auf Funktionen, für die die Gleichung  $\sum_1^n \gamma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \psi = 0$  gilt, wobei die  $\gamma_r$ , die in der Diracschen Theorie des Elektrons auftretenden antikommutativen Operatoren bedeuten. Die Überlegungen werden für einen  $n$ -dimensionalen Raum durchgeführt.

*F. Sauter* (Leipzig).

**Wigner, E.: Über eine Verschärfung des Summensatzes.** Physik. Z. 32, 450—453 (1931).

Es wird der Versuch gemacht, aus dem Summensatz von Thomas, Reiche und Kuhn Aussagen über die Summen der Übergangswahrscheinlichkeiten eines atomaren Systems für die einzelnen Übergänge zu gewinnen: In Atomen gibt es die 3 Übergangsmöglichkeiten  $\Delta l = 0, +1, -1$  für die Azimutalquantenzahl. Die Summe aller Über-



gangswahrscheinlichkeiten läßt sich infolgedessen in 3 Teilsummen mit  $\Delta l = 0$ ,  $\Delta l = +1$ ,  $\Delta l = -1$  zerlegen. Das Problem ist, diese 3 Summen einzeln zu bestimmen. Dies gelingt mit Hilfe der Summenregeln von Ornstein und Burger im Falle des Eielektronenproblems. Im allgemeinen Fall kann man für die 3 Summen nur 2 Relationen aufstellen, und daher nur Abschätzungen der Summen geben, die für große Quantenzahlen etwas näher diskutiert werden. Dieselben Formeln wie für die Übergänge der Azimutalquantenzahl gelten auch für die innere Quantenzahl.

K. Bechert (München).

**Rosenfeld, L., et J. Solomon:** Sur la théorie quantique du rayonnement. J. Phys. et Radium, VII. s. 2, 139—147 (1931).

Dans cet intéressant travail les auteurs montrent que la difficulté de l'énergie infinie au zéro absolu de la radiation peut être levée si l'on prend comme fonction de Hamilton (densité d'énergie) l'expression  $H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 F_{\alpha} F_{\alpha}^{+}$  où  $F_{\alpha}$  et  $F_{\alpha}^{+}$  sont liés avec les champs électrique ( $\mathfrak{E}$ ) et magnétique ( $\mathfrak{H}$ ) par les relations

$$F_{\alpha} = \mathfrak{E}_{\alpha} + \frac{\text{rot}_{\alpha}}{\sqrt{\Delta}} \mathfrak{H}; \quad F_{\alpha}^{+} = \mathfrak{E}_{\alpha} - \frac{\text{rot}_{\alpha}}{\sqrt{\Delta}} \mathfrak{H},$$

$\sqrt{\Delta}$  désignant la „racine carrée“ du laplacien. En supposant que la fonction de Lagrange  $L$  est donnée par  $2L = \sum_{\alpha=1}^3 \left( F_{\alpha} \cdot \frac{F_{\alpha}^{+}}{\sqrt{\Delta}} - F_{\alpha} F_{\alpha}^{+} \right)$  on est conduit aux équations

de Maxwell pour le vide. D'autre part, l'application de la méthode de quantification des systèmes continus donne les équations l'échange équivalentes à celles de la théorie de Heisenberg et Pauli. Par un changement de variables canoniques les auteurs obtiennent ensuite la décomposition de l'énergie électromagnétique en photons, sans énergie au zéro absolu, ce qui fait l'objet essentiel de la théorie proposée. La théorie permet aussi de retrouver correctement la formule d'Einstein pour les fluctuations du rayonnement.

V. Fock (Leningrad).

**Fock, V.:** Die inneren Freiheitsgrade des Elektrons. (Phys.-Technol. Inst., Leningrad.) Z. Physik 68, 522—534 (1931).

Die Arbeit beschäftigt sich damit, die Aussagen der Diracschen Theorie des Drehmomentes über das Eigenmoment des Elektrons genauer zu analysieren, insbesondere auch zwecks Aufklärung des bislang nicht recht klaren Zusammenhanges der Diracschen relativistischen Theorie mit der im Falle kleiner Geschwindigkeiten gültigen Paulischen Theorie. Die Diracsche Theorie liefert bekanntlich außer den translatorischen und dem Spin-Freiheitsgrad noch einen weiteren Freiheitsgrad des Elektrons, mit welchem die grundsätzlichen Schwierigkeiten der Theorie in Verbindung stehen. Nach Schrödinger kann die Wirkung dieses weiteren Freiheitsgrades auf die Ortsbewegung des Elektrons beschrieben werden als Überlagerung einer „Zitterbewegung“, so daß sich die Ortsbewegung des Elektrons im gewöhnlichen Sinne durch eine Mittelwertbildung über die der Diracschen Gleichung entsprechende Bewegung ergibt. Bezüglich des Spins ergibt sich nun nach Fock entsprechend die Paulische Theorie (für den Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten), indem man für diesen Grenzfall noch eine Mittelwertbildung über die von der Diracschen Theorie gelieferte Bewegung des Eigenmomentes des Elektrons ausführt, wobei sich der überzählige Freiheitsgrad eliminiert.

P. Jordan (Rostock).

**Kastler, A.:** Non existence d'un spin des photons. J. Phys. et Radium, VII. s. 2, 159—164 (1931).

Die Idee eines Impulsmoments (Spin) des einzelnen Photons wird nahegelegt durch die bekannte Folgerung aus der Theorie der Spektren, nach welcher jeder Übergang eines Atoms mit  $\Delta l = \pm 1$  mit der Abgabe eines Impulsmoments des Betrages  $\pm \hbar/2\pi$  an die Strahlung verbunden sein muß. Wäre sie richtig, so könnte man erwarten,



daß eine bestimmte, von einer Lichtquelle  $A$  im transversalen Zeemaneffekt emittierte  $\sigma$ -Komponente nur dann von einer gleichen Lichtquelle  $B$  voll absorbiert werden kann, wenn die letztere in einem gleichen und gleichgerichteten Magnetfeld sich befindet wie  $A$ . Dagegen sollte Gegenrichtung beider Magnetfelder die Absorption verhindern. Dies ist jedoch keineswegs der Fall, wie schon Versuche von R. Frisch [Z. Physik. **61**, 626 (1930)] gezeigt haben und wie die Versuche des Verf. bestätigen. Die letzteren sind an den  $D$ -Linien des Natriums im anomalen Zeemaneffekt bei Feldern von 3000 bis 8000 Gauss durchgeführt, sowohl mit zwei Natriumflammen wie unter Verwendung zweier mit Na-Dampf gefüllter Resonanzgefäße.

Fues (Hannover).

**Kronig, R. de L., und S. Frisch: Kernmomente.** (*Naturkundig Labor., Univ. Groningen.*) Physik. Z. **32**, 457—472 (1931).

Die Arbeit ist ein Bericht über Grundlagen und Ergebnisse der Kernstatistik und der Kerndrehimpulse. Zunächst wird ausführlich von der Hyperfeinstruktur und ihrem Zeemaneffekt berichtet. Dann von dem Intensitätswechsel bei zweiatomigen Molekülen. Schließlich von einigen anderen Erscheinungen: Hyperfeinstruktur in Röntgenspektren, Polarisation der Resonanzfluoreszenz (Ellett) und spezifische Wärme von Wasserstoff. Am Ende wird eine Tabelle der bisher bekannten Kerneigenschaften gegeben.

E. Teller (Göttingen).

**Goldstein, L.: Sur l'application de la mécanique quantique à la cinétique chimique.** C. r. Acad. Sci. Paris **192**, 1536—1539 (1931).

Der Verf. betrachtet das folgende quantenmechanische Problem: Zwei Kerne schwingen unter dem Einfluß des homöopolaren Potentials  $V(r)$ . Die Schrödingergleichung lautet  $\Delta\psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}(W - V(r))\psi = 0$ , wo  $\mu$  die reduzierte Masse ist und nach Morse  $V(r) = De^{-2a(r-r_0)} - 2De^{-a(r-r_0)}$ . Die Dissoziationsenergie  $D$ , der Wert der Konstante  $a$ , der Kernabstand im Grundzustand  $r_0$ , können aus den Bandenspektren entnommen werden. Das Problem hat für  $W < 0$  ein diskretes Spektrum (chemische Bindung) und für  $W > 0$  ein kontinuierliches (dissoziierter Zustand). Die Bindungswahrscheinlichkeit ist die Übergangswahrscheinlichkeit aus dem kontinuierlichen Teil in den diskreten. Da das System kein elektrisches Moment besitzt, kann der Übergang nicht spontan unter Lichtemission erfolgen. Die Bindung kann nur durch die Anwesenheit eines dritten Atoms (Dreierstoß), das den Überschuß an Energie aufnimmt, eintreten.

G. Rumer (Göttingen).

**Göppert-Mayer, Maria: Über Elementarakte mit zwei Quantensprüngen.** Ann. Physik, V. F. **9**, 273—294 (1931).

Zuerst wird die Wahrscheinlichkeit der simultanen Emission oder Absorption von 2 Lichtquanten berechnet, dann die von unelastischen Elektronenstößen mit gleichzeitiger Emission eines Lichtquanten. Quantitative Angaben sind leider spärlich; die Wahrscheinlichkeit der zweitgenannten Prozesse wird auf  $10^{-7}$  mal der Ionisierungswahrscheinlichkeit durch Elektronenstoß abgeschätzt. Ist dies richtig, so können nach Ansicht des Ref. die Prozesse nicht beobachtet werden, da die direkte Stoßanregung (ohne Lichtemission) eines diskreten Niveaus größenordnungsmäßig ebenso häufig ist wie die Ionisierung eines Atoms (Ann. Physik **5**, 325), ein Umstand, der in der referierten Arbeit auch sonst (S. 292) übersehen wurde.

H. Bethe (München).

**Bartlett, Russell S.: Fermi-Dirac statistics applied to the problem of space charge in thermionic emission.** Physic. Rev., II. s. **37**, 959—969 (1931).

Es wird (teilweise mit Hilfe graphischer Integration) das Problem der Raumladungsverteilung eines der Fermi-Dirac-Statistik gehorchenden Elektronengases über einer ebenen Elektrode behandelt. Dem Ref. erscheint jedoch die Anwendbarkeit einer solchen Betrachtung für die Elektronenemission fraglich, da der Potentialsprung in der Grenzschicht doch nicht allein auf diesen Effekt zurückgeführt werden kann, während für größeren Abstand die klassische Behandlung ausreicht.

Nordheim.